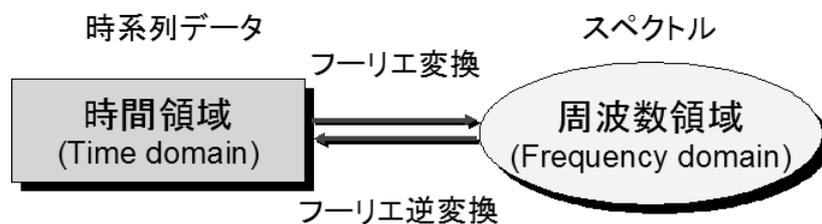


時系列解析 (1)¹

[0] はじめに

ここでは、時系列データを スペクトル解析 (周波数解析, フーリエ解析などともいう) するための原理について学ぶ。スペクトル解析とは、不規則 (ランダム) データを構成周波数成分に分解し、各周波数とエネルギーとの関係 (スペクトルという) を取り出すための理論及び手法のことをいう。



例)

■ 地球や惑星・星などの分光観測 (光のスペクトル)

光 = さまざまな波長の波の重ね合わせから成る
光のスペクトル = 各波長成分の強さの分布

■ 時系列変動

不規則変動 = さまざまな波長の波の重ね合わせから成る
不規則変動のスペクトル = 各波長成分の強さの分布

地震活動
気象現象
気候変動
古気候・古環境変動
etc.

■ 空間パターン

断層配列
堆積物のラミナ, ベディング
鉱物の結晶構造
etc.

¹参考書: 「スペクトル解析」 日野幹雄著, 朝倉書店.

[1] フーリエ変換とスペクトル

1.1 フーリエ級数

関数 $x(t)$ がすべての t に対して

$$x(t + nT) = x(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となるような整定数 T を持つならば,

$$\begin{cases} x(t) : & \text{周期関数} \\ T : & \text{基本周期} \end{cases}$$

という.

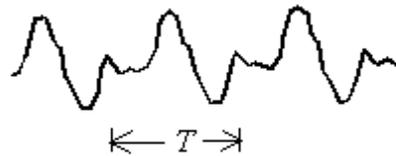


図 1 : 周期関数の例

一般に, 区間 $[-T/2, T/2]$ を 1 周期とする周期関数は, 周期 T を持つ三角関数を使って,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + a_2 \cos \frac{4\pi t}{T} + \dots + a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + \dots \\ &\quad + b_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + b_2 \sin \frac{4\pi t}{T} + \dots + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

のように表すことができる. 右辺を関数 $x(t)$ の フーリエ級数 (**Fourier series**) という.

このとき, 係数 a_n, b_n は,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

と表される. a_n, b_n のことをフーリエ係数という.

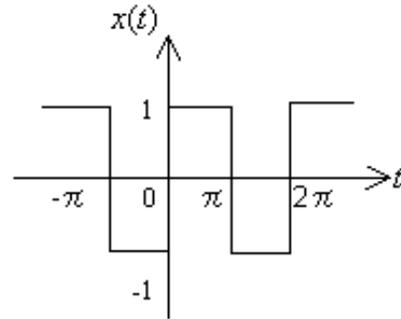
すなわち,

★ 任意の周期関数は, 三角関数の無限級数で表せる!

例) 周期 2π の関数

$$x(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi < t < 0) \\ 1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

$$x(t + 2\pi) = x(t)$$



をフーリエ級数で表せ.

解) 周期 $T = 2\pi$ だから,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} dx \right\} = \frac{1}{\pi} (-\pi + \pi) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-1) \cos nt dt + \int_0^{\pi} \cos nt dt \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \sin nt \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nt \right]_0^{\pi} = 0 \quad (n \neq 0)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-1) \sin nt dt + \int_0^{\pi} \sin nt dt \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nt \right]_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \cos nt \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \{1 - (-1)^n\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

したがって,

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \frac{1}{7} \sin 7t + \dots \right)$$

* $x(t)$ は奇関数なので, 正弦関数のみで表されている².

² $g(-t) = g(t)$ の場合, $g(t)$ を偶関数という. また, $h(-t) = -h(t)$ の場合, $h(t)$ を奇関数という. \cos は偶関数, \sin は奇関数である. 偶関数 \times 偶関数 = 偶関数, 奇関数 \times 奇関数 = 偶関数, 偶関数 \times 奇関数 = 奇関数である. また,

$$\int_{-T}^T g(t) dt = 2 \int_0^T g(t) dt, \quad \int_{-T}^T h(t) dt = 0$$

という性質がある.

フーリエ級数で関数形を正確に表すには、項数を非常に多く取らなければならない。

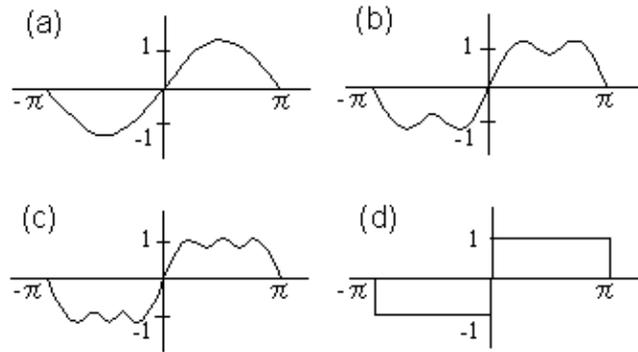


図 2 : (a) $\frac{4}{\pi} \sin t$, (b) $\frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t$, (c) $\frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t$, (d) $n \rightarrow \infty$

1.2 複素フーリエ級数

フーリエ級数を使って解析を行う場合、三角関数よりも複素数の指数関数を用いた方が便利である。オイラーの公式から、

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

$$\therefore \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{cases}$$

これを (1) 式に代入して、

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_n e^{i2n\pi t/T} + B_n e^{-i2n\pi t/T} \right\} \quad (4)$$

$$A_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i2n\pi t/T} dt \quad (5)$$

$$B_n = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{i2n\pi t/T} dt \quad (6)$$

あるいは、 n を $-\infty$ から ∞ までまとめると、

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2n\pi t/T} \quad (7)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i2n\pi t/T} dt \quad (8)$$

これを、複素フーリエ級数 (**complex Fourier series**) という。

* 区間 $[-T/2, T/2]$ で定義される任意の周期関数は，周期が T/n ($n = 1, 2, \dots$) の無数の harmonic wave $e^{i2n\pi t/T}$ ($= \cos(2n\pi t/T) + i \sin(2n\pi t/T)$) の重ね合わせで成り立っており，各成分波の強さは， C_n により与えられる．

1.3 フーリエ積分

周期関数がフーリエ級数に展開できることを述べた．それでは周期的ではない関数に対してはどうであろうか．周期的ではないということは，周期 $T \rightarrow \infty$ とみなせる．以下では，そのような場合にはフーリエ級数がフーリエ積分と呼ばれるものになることを示す．

いま， $f_n = n/T$ ， $\Delta f = 1/T$ として (7) 式と (8) 式に代入すると，

$$\begin{aligned} x_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2n\pi t/T} dt \right\} e^{i2n\pi t/T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi f_n t} dt \right\} e^{i2\pi f_n t} \Delta f \end{aligned}$$

ここで，

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t)$$

とすれば， $T \rightarrow \infty$ のとき $\Delta f \rightarrow 0$ であるから，

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df \quad (9)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (10)$$

となる．これを，フーリエ積分 (**Fourier integral**) あるいは，フーリエ変換 (**Fourier transform**) という．(9) 式と (10) 式は，互いにフーリエ変換，フーリエ逆変換の関係にある，という．

周波数 f の代わりに，角周波数 $\omega = 2\pi f$ を用いると，

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (11)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (12)$$

となる (ただし， $X(\omega)/2\pi$ をあらためて $X(\omega)$ と定義し直した)．

一方，不規則変動が空間的変動の場合には，時間 $t \rightarrow$ 距離 x ，角周波数 $\omega \rightarrow$ 波数 k として，

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk \quad (13)$$

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \quad (14)$$

となる。

* 積分の前の係数は，その積が $1/2\pi$ であるように適当に分ければよい (教科書によっていろいろな流儀があるので注意すること)。

例) 次の関数 $x(t)$ のフーリエ積分 (フーリエ変換) を求めよ (ただし， $a > 0$ とする)。

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

解)

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-ift} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-ift} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-(a+if)t}}{a+if} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+if} \end{aligned}$$

1.4 スペクトル

不規則変動 = さまざまな周波数の波の重ね合わせ (フーリエ積分で表現される)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft} df$$

フーリエ成分 $X(f)$ は周波数 f の波 $e^{i2\pi ft}$ の振幅を表す

→ $|X(f)|^2$ はそのエネルギーを表す

■ エネルギースペクトル密度 (Energy Spectrum Density; ESD)

信号のエネルギーが周波数に対してどのように分布するかを示したもの。すなわち，周波数 f に対するエネルギー $|X(f)|^2$ の分布のこと，

$$\Phi(f) = |X(f)|^2 \quad (15)$$

■ パワースペクトル密度 (Power Spectrum Density; PSD)

有限区間での周期関数や $(-T/2, T/2)$ 以外では変動がゼロの場合にはエネルギー $|X(f)|^2$ も有限となるが，区間 T が無限の場合にはエネルギーも無限大になってし

まう。そこで、単位時間あたりの平均エネルギーを考えたものがパワースペクトル密度である。

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(f)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X(f) \cdot X^*(f)}{T} \quad (16)$$

ここで、 $X^*(f)$ は $X(f)$ の共役複素数である。

また、単位時間あたりの平均エネルギー（単位時間当たりの平均エネルギーをすべての周波数で足したものは、

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df \quad (17)$$

となるが、これは周波数 f と $f + df$ の間に含まれる成分波の変動エネルギー $\overline{x^2}$ への寄与率を表しておりスペクトル $P(f)df$ とも考えることができる。

式 (15) または (16) で表される関係式が、原義的なスペクトル $P(f)$ の定義である。

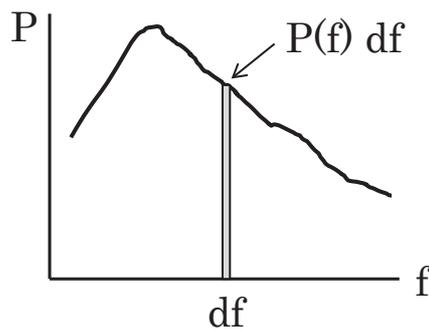


図3 パワースペクトル

[2] 自己相関関数とスペクトル

2.1 自己相関関数

関数 $x(t)$ が周期 T の周期関数 $x(t) = x(t \pm nT)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の場合

→ 時間を nT だけずらすと、もとの波形と重なる

不規則変動 $x(t)$ が周期性の強い場合

→ ある時間ずらすと、もとの波形とかなり似る

不規則変動の周期性を調べる

→ $x = x(t)$ と $y = x(t + \tau)$ の相関を取る。いま、時間に関する不規則変動量を $x(t)$ とするとき、 τ 時間隔たった二つの変動の積の平均値

$$C(t, \tau) = E[x(t)x(t + \tau)] \quad (18)$$

で定義される統計的関数を自己相関関数 (**auto-correlation function**) と呼ぶ。ここで、 τ をラグ (**lag**) という。

ここでの平均操作は、アンサンブル平均 (母集団平均) である。

$$E[f_k(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(t)$$

しかし、定常確率過程 (アンサンブル平均が時刻によらない場合) では、多くの場合、

$$E[f_k(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_k(t) dt$$

のように時間平均で置き換えることができる。この性質をエルゴード性という。実際の物理現象の多くは、それが定常過程に属するときエルゴード性を持ち、現象の統計的特性は任意の観測例の時間変動から推定できる。この場合、自己相関関数は、

$$C(\tau) = \overline{x(t)x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t + \tau) dt \quad (19)$$

と表される。 $C(\tau)$ は時刻 t には無関係であり、ラグ τ のみの関数であることに注意する。

2.2 自己相関関数の一般的性質

(1) 自己相関関数は偶関数

上の (18) 式において $\tau = -\tau$ とすれば、

$$\begin{aligned} C(-\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t - \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2} - \tau}^{\frac{T}{2} - \tau} x(t_1)x(t_1 + \tau) dt_1 \end{aligned}$$

ただし、 $t_1 = t - \tau$ という変数変換を行った。 $T \rightarrow \infty$ では区間は一致するので、

$$\therefore C(\tau) = C(-\tau) \quad (20)$$

(2) 自己相関関数は $\tau = 0$ で最大

$\tau \neq 0$ に対して $\{x(t) \pm x(t + \tau)\}^2$ の平均を考えると

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{x(t) \pm x(t + \tau)\}^2 dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t + \tau) dt \pm 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t + \tau) dt \\
&= 2C(0) \pm 2C(\tau) > 0 \\
&\therefore C(0) > |C(\tau)| \quad (\tau \neq 0)
\end{aligned} \tag{21}$$

(3) 不規則現象では一般に τ が大きくなれば相関は悪くなる

$$C(\tau) \longrightarrow 0 \quad (\tau \longrightarrow \infty) \tag{22}$$

*時間が経てば過去のことは忘れてしまうということ。

2.3 スペクトルとの関係

$x(t)$ は $-T/2 < t < T/2$ で不規則変数かつ $x(t) = 0$ ($t > |T/2|$) とする。

フーリエ変換

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt
\end{aligned}$$

自己相関関数は,

$$\begin{aligned}
C(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t + \tau) dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega(t+\tau)} d\omega \right\} dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega\tau} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{i\omega t} dt \right\} d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi X(\omega) X^*(\omega)}{T} \right\} e^{i\omega\tau} d\omega
\end{aligned} \tag{23}$$

ただし,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt = 2\pi X^*(\omega)$$

という関係を使った。

ここで, $\tau = 0$ とおけば, $C(0) = \overline{x^2}$ であるから,

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi X(\omega) X^*(\omega)}{T} \right\} d\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

これは (16) 式と比較すると, $f \leftrightarrow \omega$, $P \leftrightarrow S$ という関係になっている。

したがって、パワースペクトル S は

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi X(\omega)X^*(\omega)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi |X(\omega)|^2}{T} \quad (24)$$

不規則変動 $x(t)$ のフーリエ成分 $X(\omega)$ は複素数だが、パワースペクトル $S(\omega)$ は実の偶関数であることに注意する。

(22) 式と (23) 式より、自己相関関数 $C(\tau)$ はパワースペクトル $S(\omega)$ のフーリエ変換であることが導かれる。

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega \quad (25)$$

また、この逆フーリエ変換より、パワースペクトルは自己相関関数のフーリエ変換であることが導かれる。

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (26)$$

すなわち、自己相関関数とパワースペクトルは互いにフーリエ変換の関係にある。この関係をウィーナー・ヒンチン (Wiener-Khintchine) の公式という。

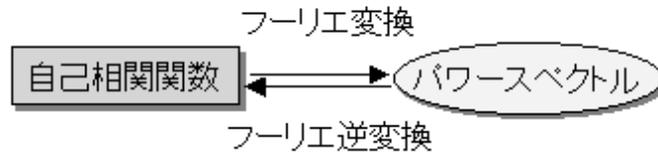


図 3：ウィーナー・ヒンチン (Wiener-Khintchine) の公式

* 実際のスペクトルは、 $\omega > 0$ とするのが自然であるから、

$$\begin{aligned} S(\omega) &\longrightarrow G(\omega) \\ \overline{x^2} &= \int_0^{\infty} G(\omega)d\omega \left(= 2 \int_0^{\infty} S(\omega)d\omega \right) \\ \therefore G(\omega) &= 2S(\omega) \end{aligned}$$

ここで、
 $S(\omega)$: 両側スペクトル (two-sided spectrum)
 $G(\omega)$: 片側スペクトル (one-sided spectrum)

という。

[3] スペクトル計算の理論

3.1 誤差論

(1) 記録の有限性の影響

記録の長さは有限である。すなわち、本来ならば無限に続くシグナル $x(t)$ から有限区間 $[-T, T]$ を切り取り、区間外をすべて 0 とみなしたことに相当する。これは、 $x(t)$ に窓関数 (**window function**) $W_0(t)$ 、ただし

$$W_0(t) = \begin{cases} 1 & (-T \leq t \leq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases} \quad (27)$$

を掛け合わせたものだと考えることができる。 W_0 は箱形 (**boxcar function** 型) ウィンドウと呼ばれる。

$x(t)$ のフーリエ変換も、実際には $W_0(t)x(t)$ をフーリエ変換していることになる。すなわち、 $x(t)$ のスペクトルを求めるということは、

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(t)x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (28)$$

をいう計算を行っていることになる。

ここで注意すべき点は、窓関数 $W_0(t)$ を使って求められたこのスペクトルと、本来のスペクトルは同じではない、ということである。すなわち、 $x(t)$ のフーリエ変換を $F(x(t))$ と表せば、 $F(W_0(t)x(t)) = F(W_0(t)) \cdot F(x(t))$ となる。

たとえば、 $W_0(t)$ のフーリエ変換は、

$$\begin{aligned} Q_0(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_0(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-T}^T e^{-i2\pi ft} dt = \left[\frac{e^{-i2\pi ft}}{-i2\pi f} \right]_{-T}^T \\ &= 2T \frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT} \end{aligned} \quad (29)$$

であり、この影響を受けることになる (図 4 (b))。

一般に、窓関数のフーリエ変換を考えて、それをスペクトルウィンドウ $Q(f)$ と呼ぶと、

$$Q(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (30)$$

$$W_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(f)e^{i2\pi ft} df \quad (31)$$

となる。すなわち、スペクトルウィンドウと窓関数は互いにフーリエ変換の関係にある。

スペクトルウィンドウは、なるべく $f = 0$ 近くのピークに比べて両側の振動が小さい方が望ましい (負のスペクトルの原因になるため)。その意味では、窓関数としてほかにもいくつか適当なものが考えられる。以下は、よく使われるものである。

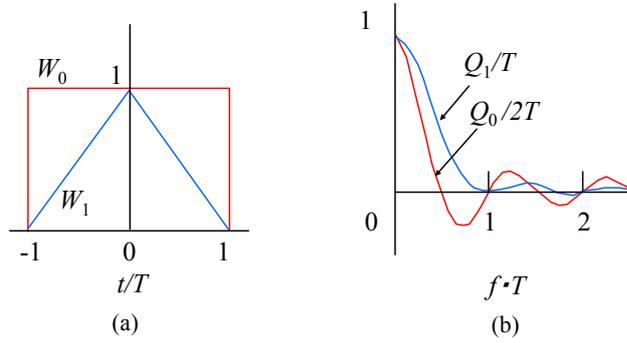


図 4 : (a) 窓関数 W_0, W_1 , (b) スペクトルウィンドウ Q_0, Q_1 .

$$W_1 = 1 - \frac{|t|}{T} \quad (32)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi t}{T} \right) \quad (\text{ハニング ; Hanning}) \quad (33)$$

$$W_3 = 0.54 + 0.46 \cos \frac{\pi t}{T} \quad (\text{ハミング ; Humming}) \quad (34)$$

これらに対するスペクトルウィンドウは、それぞれ以下のようになる.

$$Q_1(f) = T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right)^2 \quad (35)$$

$$Q_2(f) = \frac{1}{2} Q_0(f) + \frac{1}{4} \left\{ Q_0 \left(f + \frac{1}{2T} \right) + Q_0 \left(f - \frac{1}{2T} \right) \right\} \quad (36)$$

$$Q_3(f) = 0.54 Q_0(f) + 0.23 \left\{ Q_0 \left(f + \frac{1}{2T} \right) + Q_0 \left(f - \frac{1}{2T} \right) \right\} \quad (37)$$

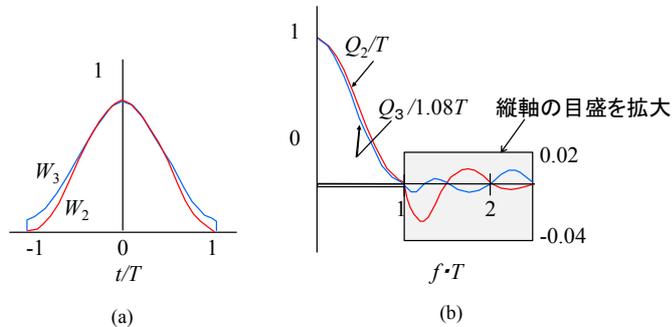


図 5 : (a) 窓関数 W_2, W_3 , (b) スペクトルウィンドウ Q_2, Q_3 .

(2) 記録の離散化による影響

実際の現象をある有限な時間間隔で記録したものを、デジタルデータと呼ぶ。このようなデータの抽出をサンプリングといい、その間隔をサンプリング間隔またはサンプリングレイトという (サンプリング間隔の逆数をサンプリング周波数 f_S と呼ぶ)。

記録されるデータ量や変動現象は、データのサンプリングに依存している。サンプリング間隔が大きければ、データ量は小さいが、短時間 (微小) スケールの変動は記録することができない。逆に、サンプリング間隔が小さければ、様々なスケールの現象を記録することができるが、データ量は膨大になる。

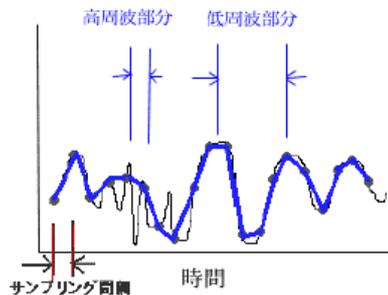


図 6 : 高周波成分はサンプリング間隔を小さくしなければ表現できない

サンプリング間隔が Δt の場合、解像可能な最大の周波数は、

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2}f_S \quad (38)$$

で与えられ、これをナイキスト周波数 (Nyquist frequency) という。周期がサンプリング間隔の 2 倍 ($= 2\Delta t = 1/f_N$) 以下の波 (ナイキスト周波数よりも周波数が高い波) は、より長周期の波と区別することができない。したがって、観測を行う際には、問題とする変動の最低周期より Δt を十分小さく取らなければならない。サンプリング間隔を大きく取ったことによって生じる見かけ上の変動をエイリアシング (aliasing) という。

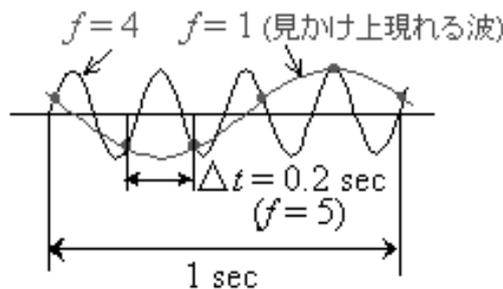


図 7 : 正弦波のサンプリングにともなうエイリアシングの例

いま、データ $x(t)$ が Δt 間隔で読みとられているとする。この場合、 $C(\tau)$ は $\tau = n\Delta t$ (n : 整数) でしか求められない。得られるスペクトルの推定値を $\tilde{P}(f)$ とすれば、

$$\tilde{P}(f) = \Delta\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi fn\Delta\tau} C(n\Delta\tau) \quad (39)$$

$$C(n\Delta\tau) = \int_{-\frac{1}{2\Delta\tau}}^{\frac{1}{2\Delta\tau}} e^{i2\pi fn\Delta\tau} \tilde{P}(f) df \quad (40)$$

ここで、 $\Delta\tau = \Delta t$, $f_N = 1/2\Delta\tau$ に注意する。真のスペクトル $P(f)$ と $C(\tau)$ との関係は、

$$\begin{aligned} C(n\Delta\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi fn\Delta\tau} P(f) df \\ &= \left(\cdots + \int_{-\frac{3}{2\Delta\tau}}^{-\frac{1}{2\Delta\tau}} + \int_{-\frac{1}{2\Delta\tau}}^{\frac{1}{2\Delta\tau}} + \int_{\frac{1}{2\Delta\tau}}^{\frac{3}{2\Delta\tau}} + \cdots \right) e^{i2\pi fn\Delta\tau} P(f) df \\ &= \int_{-\frac{1}{2\Delta\tau}}^{\frac{1}{2\Delta\tau}} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \left(\frac{k}{\Delta\tau} + f\right) n\Delta\tau} P\left(\frac{k}{\Delta\tau} + f\right) \right] df \\ &= \int_{-\frac{1}{2\Delta\tau}}^{\frac{1}{2\Delta\tau}} e^{i2\pi fn\Delta\tau} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{k}{\Delta\tau} + f\right) \right] df \end{aligned} \quad (41)$$

ここで $e^{i2\pi kn} = 1$ に注意。(41) 式と (42) 式を比較すれば、

$$\begin{aligned} \tilde{P}(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(\frac{k}{\Delta\tau} + f\right) \\ &= P(f) + P(2f_N - f) + P(2f_N + f) + P(4f_N - f) + P(4f_N + f) + \cdots \end{aligned} \quad (42)$$

となっていることが分かる。

* $C(\tau)$ が $\Delta\tau$ 間隔でしか与えられない場合, 求められるのは, $P(f)$ ではなく $\hat{P}(f)$
 → 真のスペクトル $P(f)$ と $2f_N = 1/\Delta t$ の整数倍だけ異なった周波数が同一視される!
 あるいは, 真のスペクトルが $|f| > f_N$ でも有限の値を持つ場合, $|f| < f_N$ の領域に f の f_N 間隔

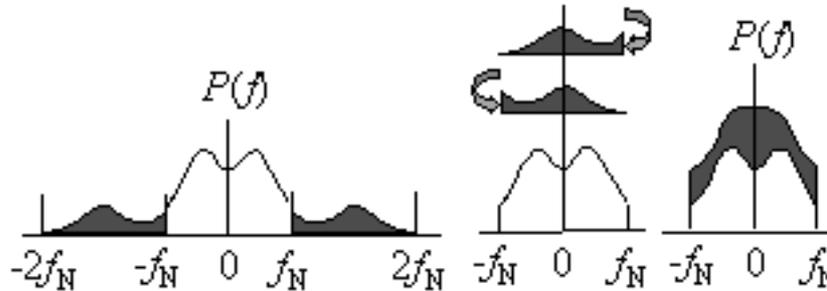


図8: 離散的データ読みとりによるエイリアシングとナイキスト周波数

このように, 高周波数成分が低周波数成分に重なってくる現象がエイリアシングである。また, このことから f_N を折り畳み (folding) 周波数ともいう。

(3) スペクトルの推定誤差

時系列 $x(t)$ のスペクトルは,

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(f)|^2}{T}$$

によって求められる。 $X(f)$ は $x(t)$ のフーリエ変換であり,

$$|X(f)|^2 = X_R^2(f) + X_I^2(f)$$

である (ここで, X_R 及び X_I は, $X(f)$ の実数部と虚数部)。

もし, $x(t)$ が正規分布ならば, フーリエ変換は線型変換であるから $X_R(f)$ と $X_I(f)$ は, 互いに独立で平均値が0でかつ相等しい分散を持つ正規分布変数となる。したがって, 推定スペクトル $\hat{P}(f)$ は平均値が0の Gauss 分布に従う互いに独立な二つの変数の二乗和に等しい。これは, 自由度 $k = 2$ の χ^2 -分布に従う。したがって, 推定スペクトルの変異係数 (C.V.), すなわち正規化された標準偏差は,

$$C.V. = \sqrt{\frac{2}{k}} = 1$$

である。つまり, 直接フーリエ変換による推定スペクトルの相対誤差は記録長 T によらず **100%** である。このため, いくら T を増加させても, スペクトルの推定値は安定なものとはならない (T の増加は, 単に周波数成分の数を増やすに過ぎない)。

相対誤差を小さくするためには, スペクトルの自由度を上げて変異係数を小さくする必要がある。具体的には, 平滑化を行うことで自由度 (等価自由度) を上げることができる。平滑化には, データの統計平均や分割平均を取ったり, 移動平均などのスペクトルウィンドウをかける方法などがある (次回)。

3.2 スペクトル解析の手法

1. Blackman-Turkey 法

誤差理論に基づいた合理的なスペクトル計算法として 1950 年代後半に提案された手法。まず自己相関関数をもとめ、Wiener-Khinchine の関係式からこれをフーリエ変換することによってパワースペクトルを求める方法。分解能がやや低いが、安定したスペクトル推定が可能。1965 年に Cooley と Tukey が FFT(高速フーリエ変換) のアルゴリズムを発表するまでは、唯一の実用法であった。現在ではあまり用いられない。

2. 直接法 (記録の直接フーリエ変換による方法)

時系列データを直接フーリエ変換することによってパワースペクトルを得る方法。Cooley and Tukey (1965) が高速フーリエ変換 (**FFT=Fast Fourier Transform**) のアルゴリズムを発表し、フーリエ変換にかかる計算時間を驚異的に短縮することが可能となったため、それ以降ひろく用いられるようになった (FFT とは、有限離散データのフーリエ成分を迅速に求めるアルゴリズムであり、スペクトル推定法そのものではない)。この方法を用いてスペクトルを求める場合、自己相関関数を経ることなしに、定義に従い直接スペクトルが計算される。自己相関関数を求めるには Wiener-Khinchine の関係式を用いるが、Blackman-Turkey 法とは逆に、スペクトルの FFT として求められる。

3. MEM(最大エントロピー法)

Burg (1967) によって、“情報エントロピーを最大にするようにスペクトルを決定する” という。従来の計算法とは全く異なる考え方に立って、ランダムデータのスペクトルを推定する方法として提案された。従来の方法では与えられたデータは本来のデータの一部だけという前提で解析処理を行うのに対し、MEM ではデータは与えられたものだけであると考えられる点が、決定的に異なる。短いデータからもスペクトルの推定が可能で、かつ分解能がきわめて高い安定したスペクトルを得ることができるという、すぐれた特徴をもつ。