# 統計力学 I　講義資料（7/14）

## $\eta(x)$ の振舞について

ボース・アインシュタイン凝縮の議論で次の関数 $\eta(x)$ の振舞が重要であった。

$$\eta(x) = \int_0^\infty du \frac{\sqrt{u}}{e^{u-x}-1} \qquad (x \le 0) \tag{1}$$

この関数の以下の性質を示す。

i) $x \le 0$ で単調増加

(1) の $x$ での微分が、

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = \int_0^\infty du \frac{\sqrt{u}e^{u-x}}{(e^{u-x}-1)^2} \ge 0 \tag{2}$$

であることから明らか。（非積分関数が常に非負なので。）

ii) $\eta(x) \to 0$ $(x \to -\infty)$

$x<0$ かつ $|x| \gg 1$ のとき、$e^{u-x}-1 \sim e^{u-x}$。これより、

$$\eta(x) \sim \int_0^\infty du\sqrt{u}\, e^{-u+x} = e^x \int_0^\infty du\sqrt{u}\, e^{-u} \tag{3}$$

ここで、変数変換 $u=\xi^2$ を用いると、上の積分は

$$2e^x \int_0^\infty d\xi \xi^2\, e^{-\xi^2} = \frac{\xi^2}{2}\, e^x \tag{4}$$

と計算できる。ここで、ガウス積分から得られる以下の結果を用いた。

$$\int_{-\infty}^\infty dx\, x^2\, e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \tag{5}$$

(4) より、$\eta(x) \to 0$ $(x \to -\infty)$。

iii) $\eta(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta(\frac{3}{2}) = 2.315...$

$$\begin{aligned}
\eta(0) &= \int_0^\infty du\, \frac{\sqrt{u}}{e^u-1} = \int_0^\infty du\, \frac{\sqrt{u}\, e^{-u}}{1-e^{-u}} = \int_0^\infty du\, \sqrt{u}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-nu}\right) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty du\, \sqrt{u}\, e^{-nu} = \sum_{n=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty d\xi\, \xi^2\, e^{-n\xi^2} \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n^3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3/2}}
\end{aligned} \tag{6}$$

となり、$\zeta$ 関数による表示が得られる。ただし、$|z|<1$ のときに成り立つ恒等式 $\sum_{n=1}^\infty z^n = z/(1-z)$、と変数変換 $u=\xi^2$、および (5) 式を用いた。