

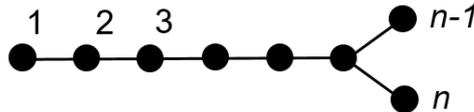
# 立教大学 集中講義 (統計物理学・量子多体系入門)

## レポート (2021/10/1 出題)

以下の大問 1~5 から 2 題を選択して解答せよ。文献等を参照した場合は、そのことを明記せよ。

### 1. グラフと行列

$n$  個の頂点からなる  $D$  型ディンキン図形の隣接行列を  $A$  とする。(頂点のラベル付けは、下図を参照せよ。)  $A$  の固有値・固有ベクトルを以下の手順にしたがって求めよ。



(a) 次のベクトルが、 $A$  の 0 固有値に対応する固有ベクトルであることを確認せよ。

$$\mathbf{v}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \dots, 0, 1, -1)^T \quad (1)$$

次に、 $\mathbf{v}_n$  と直交する、以下の  $n-1$  個のベクトルを考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{v}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0, 0)^T \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_{n-2} &= (0, 0, 0, \dots, 1, 0, 0)^T \\ \mathbf{v}_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1)^T \end{aligned} \quad (2)$$

これらを用いて、行列  $T = (t_{i,j})$ ,  $t_{i,j} = \langle \mathbf{v}_i, A\mathbf{v}_j \rangle$  ( $1 \leq i, j \leq n-1$ ) を定義する。

(b)  $T$  の行列要素を求めよ。

(c)  $T$  の固有値・固有ベクトルを求めよ。(ヒント:固有ベクトルとして、 $\mathbf{u} = (u_j)$ ,  $u_j = Ae^{ipj} + Be^{-ipj}$  の形を仮定して、境界条件から波数  $p$  を求める。)

### 2. 自由ボゾン系と二次形式

ペアリング項を含む、ボゾン系の二次形式のハミルトニアンを具体例を作成し、固有エネルギー・固有状態を全て求めよ。自分で作成することが難しい場合は、論文などに載っている例を具体的な計算も含めて紹介せよ。(またその場合は、必ず参照した文献を明記すること。)

### 3. 量子 Ising 模型と Majorana フェルミオン

1次元量子 Ising 模型 (開放境界条件) のハミルトニアンは、以下で与えられる。

$$H = -J \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - \Gamma \sum_{j=1}^N \sigma_j^x. \quad (3)$$

このハミルトニアンは、Majorana フェルミオンの演算子を用いると、

$$H = -i\Gamma \sum_{j=1}^N \gamma_{2j-1} \gamma_{2j} - iJ \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_{2j} \gamma_{2j+1} \quad (4)$$

と書き換えられる。以下では、 $H$  が gapless となる  $\Gamma = J$  の場合について調べる。

(a)  $H$  は、反交換関係

$$\{d_k, d_\ell^\dagger\} = \delta_{k,\ell}, \quad \{d_k, d_\ell\} = \{d_k^\dagger, d_\ell^\dagger\} = 0 \quad (5)$$

を満たすフェルミオン演算子  $d_k, d_k^\dagger$  を用いて、

$$H = \sum_{k=1}^N \epsilon_k \left( d_k^\dagger d_k - \frac{1}{2} \right) \quad (6)$$

の形に書くことができる。 $\epsilon_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) を求めよ。

(b)  $H$  の基底状態エネルギー  $E_0$  を求めよ。

(c) 基底状態におけるエネルギー密度は、 $N$  が十分大きい場合、

$$\frac{E_0}{N} = e_0 + \frac{e_1}{N} + \frac{e_2}{N^2} + O(N^{-3}) \quad (7)$$

と書ける。定数  $e_0, e_1, e_2$  を求めよ。(興味のある人は、この結果と共形場理論や有限サイズ・スケーリングとの関係を調べ議論せよ。)

## 4. Fermi-Hubbard 模型

2 サイトの Fermi-Hubbard 模型のハミルトニアンは、以下で与えられる。

$$H_2 = -t \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} (c_{1,\sigma}^\dagger c_{2,\sigma} + c_{2,\sigma}^\dagger c_{1,\sigma}) + U \sum_{i=1}^2 n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow}. \quad (8)$$

ただし、 $t > 0$ ,  $U > 0$  とする。真空状態を  $|\text{vac}\rangle$  とし、次の基底

$$|n_{1,\uparrow}, n_{1,\downarrow}, n_{2,\uparrow}, n_{2,\downarrow}\rangle := (c_{1,\uparrow}^\dagger)^{n_{1,\uparrow}} (c_{1,\downarrow}^\dagger)^{n_{1,\downarrow}} (c_{2,\uparrow}^\dagger)^{n_{2,\uparrow}} (c_{2,\downarrow}^\dagger)^{n_{2,\downarrow}} |\text{vac}\rangle, \quad n_{i,\sigma} = \uparrow \text{ or } \downarrow \quad (9)$$

で、 $H_2$  を行列として表すと  $16 \times 16$  行列となる。これを直接対角化するのは難しいので、次のように部分空間ごとに分けて考える。以下の全電子数  $N_e$  と全スピン  $\mathbf{S}_{\text{tot}} = (S_{\text{tot}}^x, S_{\text{tot}}^y, S_{\text{tot}}^z)$  は、 $H_2$  と交換する保存量である。

$$N_e = \sum_{i=1}^2 \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} n_{i,\sigma}, \quad S_{\text{tot}}^\alpha = \sum_{i=1}^2 \sum_{\mu,\nu=\uparrow,\downarrow} c_{i,\mu}^\dagger \frac{\sigma_{\mu,\nu}^\alpha}{2} c_{i,\nu} \quad (\alpha = x, y, z) \quad (10)$$

したがって、 $N_e, S_{\text{tot}}^z, (\mathbf{S}_{\text{tot}})^2$  の固有値で指定される部分空間ごとに  $H_2$  を対角化すればよい。

- $\mathbf{S}_{\text{tot}}$  が、 $H_2$  と交換することを示せ。
- $N_e = 2$  である独立な状態は、全部で何個あるか？ また、このうちさらに  $(\mathbf{S}_{\text{tot}})^2 = 0$  (singlet) の部分空間における基底状態のエネルギー、 $(\mathbf{S}_{\text{tot}})^2 = 2$  (triplet) の部分空間における基底状態のエネルギーを求めよ。
- (b) で求めた singlet と triplet の基底状態エネルギーの差が  $t \ll U$  のとき、どのように振る舞うか議論せよ。また、2 サイトの Heisenberg 模型との関係も議論せよ。

## 5. Heisenberg 模型

$S = 1/2$  Heisenberg スピン鎖のハミルトニアンは、以下で与えられる。

$$H = J \sum_{j=1}^L \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+1}. \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{S}_j = (S_j^x, S_j^y, S_j^z)$  は、サイト  $j$  のスピン演算子で、 $S_j^\alpha = \sigma_j^\alpha / 2$  ( $\alpha = x, y, z$ ) で定義される。また、周期的境界条件  $\mathbf{S}_{L+1} = \mathbf{S}_1$  が課されている。全スピン演算子  $\mathbf{S}_{\text{tot}} := \sum_{j=1}^L \mathbf{S}_j$  は、ハミルトニアン  $H$  と交換する保存量である。以下では、 $L = 4$  の場合について具体的に調べる。

- $J < 0$  の場合を考える。このとき  $H$  の基底状態および第一励起状態の固有エネルギーの表式を求めよ。また、それらの状態における  $S_{\text{tot}}^z, (\mathbf{S}_{\text{tot}})^2$  の値を答えよ。
- $J > 0$  の場合を考える。このとき  $H$  の基底状態および第一励起状態の固有エネルギーの表式を求めよ。また、それらの状態における  $S_{\text{tot}}^z, (\mathbf{S}_{\text{tot}})^2$  の値を答えよ。

[対称性をうまく利用するとよい。また、数式処理ソフトなどを適宜用いても構わない。]