物理数学 III(2019) レポート課題

出題：2019 年 12 月 23 日　締切：2020 年 1 月 24 日

注意事項

1. 問題は全部で 7 問あります。1〜4 から 3 問以上と 5〜7 から 1 問以上に解答してください（全部で 4 問以上)。

2. 大問 5, 6 については参考文献を最後に載せています。

3. 提出先は ITC-LMS (`https://itc-lms.ecc.u-tokyo.ac.jp`) とします。解答した全ての答案を 1 つのファイルにまとめて提出してください。ITC-LMS 上の提出に問題がある、あるいはできない場合のみ物理教務のレポートボックスでの提出を受け付けます。

4. 提出に際しては名前と学籍番号を明記してください。

5. 読みやすい字でお願いします。判別できない文字は採点できません。特に、手書きの答案をデジタル化する場合には画像の劣化などで字が潰れないように注意してください。

6. 締切は 2020 年 1 月 24 日 23 時 59 分です。レポートボックスは 17 時に締め切りますのでご注意ください。

1

以下の問いに答えよ。

i) p を素数とする。位数 p の有限群は巡回群 C_p に同型なことを示せ。

ii) 対称群 S_6 の既約表現の個数を求めよ。

iii) $U(2)$ および $SU(2)$ は次のように表すことができることを示せ。

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\zeta\beta^* & \zeta\alpha^* \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \zeta \in \mathbb{C},\, |\zeta| = 1,\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$
$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C},\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

iv) A がエルミート行列であることと、任意の実数 t に対し $\exp(itA)$ がユニタリ行列であることが同値であることを示せ。

v) （余裕があれば）G の完全可約表現 (D, V) において各既約成分の次元が有限のとき、全ての $D(g)$ と可換な $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が $A = c\mathbf{1}$ $(c \in \mathbb{C})$ に限られるならば、(D, V) は既約表現であることを示せ（Schur の補題)。ただし、$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ は V 上の複素線形変換全ての集合である。

2

二面体群 D_{2n} は二つの元 a, x から生成され、それらは

$$a^n = e, x^2 = e, xax^{-1} = a^{-1} \tag{1}$$

を満たす。以下の問いに答えよ。

i) $2n$ 個の元を具体的に a, x を用いて表せ。

ii) 全ての元を共役類へ分類せよ（ヒント：n の偶奇で異なる)。

iii) 1 次元の既約表現を全て求めよ。

iv) 2 次元の既約表現を全て求めよ。

v) （余裕があれば）3 次元以上の既約表現は存在しないことを示せ。

3

リー代数 $\mathfrak{su}(3)$ の基底を以下のように取る。

$$
\begin{aligned}
&E_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&E_{-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&H_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

i) この代数のカルタン部分代数を求めよ。
(Tips：カルタン部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ の可換な部分代数であって、全ての $h \in \mathfrak{h}$ が $\forall g \in \mathfrak{g}, \exists \alpha_{(h,g)} \in \mathbb{C}, [h,g] = \alpha_{(h,g)} g$ を満たすもののうち最大のものである。)

ii) 全てのルートを求め、ルートダイアグラムを図示せよ。
(Tips：$g \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ のルートは $\alpha_g = (\alpha_{(h,g)})_{h \in \mathfrak{h}} = (\alpha_{(h_1,g)}, \alpha_{(h_2,g)}, \cdots, \alpha_{(h_{|\mathfrak{h}|},g)})$ である。)

iii) 行列表示 (2) は $\mathfrak{su}(3)$ の 3 次元表現になっている。基底ベクトル

$$
u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}
$$

のウェイトベクトルを求めよ。そして、ウェイトダイアグラムを描け。
(Tips：$\mathfrak{h}$ の元は全て互いに可換なため $\mathfrak{h}$ の表現 (D, V) の表現空間上で同時固有ベクトルが取れる。それらを $\{\psi_i\}_i$ $(\psi_i \in V)$ として $h \in \mathfrak{h}$ に対し $h\psi_i = w_{(h,i)}\psi_i$ とすると、ウェイトは $w_i = (w_{(h,i)})_{h \in \mathfrak{h}} = (w_{(h_1,i)}, w_{(h_2,i)}, \cdots, w_{(h_{|\mathfrak{h}|},i)})$ である。)

iv) 単純ルートを求め、リー代数 $\mathfrak{su}(3)$ の Dynkin 図形を描け。

4

リー代数 $\mathfrak{g}$ の基底の集合を $\{x_i\}_i$ とし、$[x_i, x_j] = f_{ij}{}^k x_k$ を満たすものとする。また、$a \in \mathfrak{g}$ の随伴表現を $\mathrm{ad}(a)$ とする。さらに、カルタン計量 g_{ij} を $g_{ij} = f_{i\alpha}{}^\beta f_{j\beta}{}^\alpha$ で定める。このときカルタン行列の逆行列 g^{ij} $(g_{ij}g^{jk} = g^{ij}g_{jk} = \delta_i^k)$ が存在するならば、カシミール元 $C = g^{ij}x_i x_j$ が定義できる。

i) g^{ij} が存在するためには $\mathfrak{g}$ はどのようなリー代数でなくてはならないか。

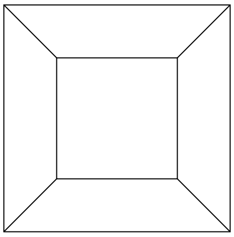
ii) $a, b \in \mathfrak{g}$ とする。$[\mathrm{ad}(a), \mathrm{ad}(b)] = \mathrm{ad}([a,b])$ を示せ。

iii) 2. の結果を用いて $f_{ijk} := f_{ij}{}^l g_{lk}$ が完全反対称であることを示せ。

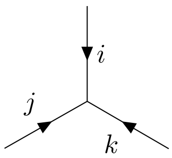
iv) カシミール元 C が全ての $\mathfrak{g}$ の元と可換であることを示せ。

5

以下のような格子上の古典統計力学模型を考える。

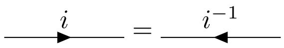


この模型では辺の部分に自由度があり、各辺の自由度はそれぞれ有限群 G の要素でラベル付けされる。このとき、Boltzmann weight は各頂点周りの辺にのみ依存しそれを $w(i,j,k)$ とすると



$$= w(i,j,k) = w(j,k,i) = w(k,i,j) \tag{4}$$

ただし、辺の向きは、



となるようにする。

このとき、グラフ $\mathcal{G}$ で表されるモデルの分配関数 $Z(\mathcal{G})$ は

$$Z(\mathcal{G}) = \sum_{\text{各辺の状態}} \prod_{\text{頂点}v} w(i_v, j_v, k_v) \tag{5}$$

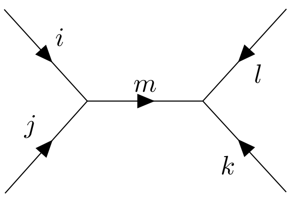
と書ける、ただし i_v, j_v, k_v は頂点 v の周りの辺の状態を表す。

このとき、以下の問いに答えよ。

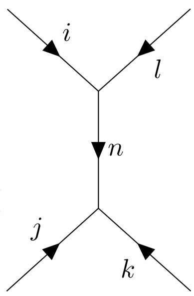
i) $w(i,j,k)$ が ijk の類関数のとき式 (4) の関係を満足することを確認せよ。
(Tips：類関数とは群 G を定義域とする関数 f で、$a, b \in G$ が同じ共役類に属するなら $f(a) = f(b)$ となるものである。)

ii) Boltzmann weight は以下の crossing symmetry を満たすようにしたい。

$$\sum_m$$



$$= \sum_n \tag{6}$$



この関係を式で書くと、

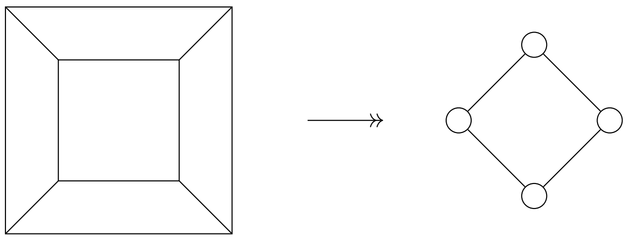
$$\sum_m w(i,j,m^{-1})w(m,k,l) = \sum_n w(l,i,n^{-1})w(n,j,k) \tag{7}$$

となる。ここで、

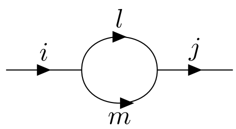
$$w(i,j,k)=\sum_R A_R\chi_R(ijk) \tag{8}$$

とすると、これは crossing symmetry を満たすことを示せ。ただし、和は G の全ての既約表現に渡ってとるものとし、A_R は任意定数、χ_R は表現 R の指標とする。

iii) w が crossing symmetry を満たすとき以下の図表の変換で分配関数が変わらないことが示せる。変換過程の途中を書け。

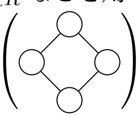


このように、式 (4) のような頂点のみからなる平面グラフは全て

$$T_{ij}=\sum_{l,m}$$  $$=\sum_{l,m} w(i,m^{-1},l^{-1})w(l,m,j^{-1}) \tag{9}$$

の 1 次元の" 鎖" として書き換えられる。以下、w は式 (8) で与えられるものとする。

iv) T_{ij} を A_R,χ_R などを用いて表せ。

v) 分配関数 Z () を計算せよ。

6

古典群の同型として $SU(2)\otimes SU(2)\cong SO(4)$ が古くから知られている。ここでは、同型写像 $F\colon SU(2)\otimes SU(2)\to SO(4)$ を具体的に構成したい。以下の問いに答えよ。

i) $SU(2)$, $SO(4)$, $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(4)$ はそれぞれ $M(2,\mathbb{C})$ あるいは $M(4,\mathbb{C})$ の部分集合としてはどのような集合か。 ただし、$M(n,\mathbb{C})$ は n 次元複素正方行列全体の成す集合である。

ii) $SU(2)\otimes SU(2)$ のリー環が $\mathfrak{su}(2)\otimes 1+1\otimes\mathfrak{su}(2)$ であることを示せ。

この古典群の同型を示すためにまずは、リー代数の同型 $\mathfrak{su}(2)\otimes 1+1\otimes\mathfrak{su}(2)\cong\mathfrak{so}(4)$ を示す。そのために同型写像 $f\colon\mathfrak{su}(2)\otimes 1+1\otimes\mathfrak{su}(2)\to\mathfrak{so}(4)$ を構成する。ここで、f として、$f(A\otimes 1+1\otimes B)=R^\dagger(A\otimes 1+1\otimes B)R$ となるものを考えたいが、R は 4×4 の行列で自由度が 16 と大きく、そのままでは考えにくいので以下の仮定を入れる。

$\mathfrak{su}(2)$ の基底はパウリ行列 σ^i $(i=x,y,z)$ で、$|+\rangle=(1,0)^{\mathrm{T}}$, $|-\rangle=(0,1)^{\mathrm{T}}$ とする。さらに、Bell 基底

$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$ をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle), \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle), \\
|\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{-}\rangle - |{-}{+}\rangle), \quad |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{+}\rangle - |{-}{-}\rangle)
\end{aligned} \tag{10}
$$

とする。ただし、$|i\rangle \otimes |j\rangle =: |ij\rangle$ とした。そして、R を

$$
R = (e^{i\theta_1}|\psi_1\rangle, e^{i\theta_2}|\psi_2\rangle, e^{i\theta_3}|\psi_3\rangle, e^{i\theta_4}|\psi_4\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & e^{i\theta_4} \\ 0 & e^{i\theta_2} & e^{i\theta 3} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & -e^{i\theta_3} & 0 \\ e^{i\theta_1} & 0 & 0 & -e^{i\theta_4} \end{pmatrix} \tag{11}
$$

であると仮定する。

iii) f が同型写像になる R を求めよ。

iv) 同型 $SU(2) \otimes SU(2) \cong SO(4)$ を示せ。

v) (余裕があれば) さらに、$SU(2) \otimes SU(2) \otimes SU(2) \cong SO(8)$ や一般化 $SU(2)^{\otimes N} \cong SO(2^N)$ などについても考えてみよ。

7

一連の講義の内容に関係する事項を 1 つ以上挙げ、それらについて数ページ程度にまとめてください。

参考文献

5. arXiv:1212.3278v1 (`https://arxiv.org/abs/1212.3278v1`)
6. arXiv:quant-ph/0608186v2 (`https://arxiv.org/abs/quant-ph/0608186v2`)
   arXiv:1111.1487v1 (`https://arxiv.org/abs/1111.1487v1`)