

# 物理数学 III (2020) 第 2 回レポート課題

出題：2020 年 12 月 21 日 (修正：2020 年 12 月 25 日) 締切：2021 年 1 月 24 日

## 注意事項

1. 問題は全部で 6 問あります。大問 1 から大問 3 は必ず解答して下さい。優、優上が欲しい人は大問 4 から大問 6 の中からいくつか追加で問題を解いて下さい。これらと第 1 回レポート課題、出席を総合的に評価して成績をつけます。
2. 提出先は ITC-LMS (<https://itc-lms.ecc.u-tokyo.ac.jp>) とします。解答した全ての答えを 1 つのファイルにまとめて提出して下さい。
3. 提出に際しては名前と学籍番号を明記して下さい。
4. 読みやすい字をお願いします。判別できない文字は採点できません。特に、手書きの答えをデジタル化する場合には画像の劣化などで字が潰れないように注意して下さい。
5. 締切は 2021 年 1 月 24 日 23 時 59 分です。

# 1

以下の各問いに答えよ。

- (i) 対称群  $S_5$  の既約表現の個数を求めよ。
- (ii) 5 次の交代群  $A_5$  を考える。
  - (a) 共役類の個数と、各共役類の元の個数を求めよ。
  - (b)  $A_5$  が、自明でない正規部分群を持たないことを示せ。(ヒント：正規部分群は共役類の和集合であることを用いれば良い。)
- (iii) リー代数  $\mathfrak{su}(N) = \{iZ \in M_n(\mathbb{C}) | Z = Z^\dagger\}$  ( $i$  は虚数単位) の基底を  $\tilde{T}^a (a = 1, \dots, N^2 - 1)$  とする。ここで、 $T^a = -i\tilde{T}^a$  と定義する。これらは  $N \times N$  のトレースレスなエルミート行列\*1であり、

$$[T^a, T^b] = \sum_{c=1}^{N^2-1} if_{abc}T^c \quad (1)$$

を満たすものとする。このとき、 $f_{abc}$  は添字  $a, b, c$  の入れ替えに対して完全反対称である。また、規格化条件  $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$  を仮定する。

- (a)  $I$  を  $N \times N$  の単位行列、 $C_F$  を定数として

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} T^a T^a = C_F I \quad (2)$$

と書けることを示せ。また、 $C_F$  の値を求めよ。

- (b)  $i, j = 1, \dots, N$  に対して、行列の成分に関する等式

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \left( \delta_{i\ell} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{k\ell} \right) \quad (3)$$

を示せ。

---

\*1 講義では数学の教科書の流儀に従って歪エルミートの  $\tilde{T}^a$  を用いた。一方、物理の教科書ではエルミートの  $T^a$  を用いることが多い。例えば、 $\mathfrak{su}(2)$  の場合、パウリ行列を  $\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  としたとき、講義で用いた流儀では例えば  $\tilde{T}^1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^x, \tilde{T}^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^y, \tilde{T}^3 = \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^z$  という基底が取れるが、この問題では  $T^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^x, T^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^y, T^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^z$  で考える。

## 2

リー代数  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  の基底を以下のように取る。

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_\gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{-\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\beta} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_2 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

- (i) この代数のカルタン部分代数を求めよ。(ヒント：カルタン部分代数  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  は  $\mathfrak{g}$  の可換な部分代数であって、全ての  $h \in \mathfrak{h}$  が  $\forall g \in \mathfrak{g}, \exists \alpha(h, g) \in \mathbb{C}, [h, g] = \alpha(h, g)g$  を満たすもののうち最大のものである。)
- (ii) 全てのルートを求め、ルートダイアグラムを図示せよ。(ヒント： $g \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$  のルートは  $\alpha_g = (\alpha(h, g))_{h \in \mathfrak{h}} = (\alpha(h_1, g), \alpha(h_2, g), \dots, \alpha(h_{|\mathfrak{h}|}, g))$  である。)
- (iii) 行列表示 (4) は  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  の 3 次元表現になっている。基底ベクトル

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

のウェイトベクトルを求めよ。そして、ウェイトダイアグラムを描け。(ヒント： $\mathfrak{h}$  の元は全て互いに可換なため  $\mathfrak{h}$  の表現  $(D, V)$  の表現空間上で同時固有ベクトルが取れる。それらを  $\{\psi_i\}_i$  ( $\psi_i \in V$ ) として  $h \in \mathfrak{h}$  に対し  $h\psi_i = w(h, i)\psi_i$  とすると、ウェイトは  $w_i = (w(h, i))_{h \in \mathfrak{h}} = (w(h_1, i), w(h_2, i), \dots, w(h_{|\mathfrak{h}|}, i))$  である。)

- (iv) 単純ルートを求め、リー代数  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  の Dynkin 図形を描け。

## 3

二面体群  $D_n$  は二つの元  $a, x$  から生成され、それらは

$$a^n = e, x^2 = e, xax^{-1} = a^{-1} \quad (6)$$

を満たす。以下の問いに答えよ。

- (i)  $2n$  個の元を具体的に  $a, x$  を用いて表せ。
- (ii) 全ての元を共役類へ分類せよ (ヒント： $n$  の偶奇で異なる)。
- (iii) 1 次元の既約表現を全て求めよ。
- (iv) 2 次元の既約表現を全て求めよ。

## 4

対称性の高い図形の塗り分け方に関して、Burnside の補題が知られている。この問題では、Burnside の補題を証明し、組み合わせ論の問題に応用することを目指す。そのために、まずは群の集合への作用を定義する。

$G$  を群、 $X$  を集合とする。 $G$  の  $X$  への (左) 作用とは、写像  $\phi: G \times X \rightarrow X$  であり、次の性質を満たすものである。

- $e \in G$  を単位元、 $x \in X$  として  $\phi(e, x) = x$
- $g, h \in G$ 、 $x \in X$  として  $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$

以下では、 $\phi(g, x)$  の代わりに  $g(x)$  と書くことにする。このとき、上の 2 番目の性質は  $g(h(x)) = (gh)(x)$  と書き直すことができる。

$x \in X$  のとき、 $X$  の部分集合  $G(x) := \{g(x) | g \in G\}$  を  $x$  の  $G$  による軌道という。<sup>\*2</sup>また、 $\text{Stab}_G(x) := \{g \in G | g(x) = x\}$  は  $G$  の部分群であり、 $x$  の安定化群 (固定部分群) という。以下では、 $G$  は有限群、 $X$  を有限集合とする。このとき、 $G$  の  $\text{Stab}_G(x)$  による (左) 剰余類分解を

$$G = \text{Stab}_G(x) \cup g_1 \text{Stab}_G(x) \cup \cdots \cup g_{m-1} \text{Stab}_G(x) \quad (7)$$

とする。このとき、剰余類の集合と軌道  $G(x)$  は  $g \text{Stab}_G(x) \mapsto g(x)$  によって 1 対 1 に対応する (軌道・固定部分群定理)。この定理から、 $x$  の軌道の元の個数  $|G(x)|$  と  $x$  の安定化群の元の個数  $|\text{Stab}_G(x)|$  の間に

$$|G| = |G(x)| |\text{Stab}_G(x)| \quad (8)$$

という関係があることが分かる。

- (i) 正五角形を中心のまわりに  $2\pi/5$  回転させる対称操作  $a$  と、ひとつの鏡映面による鏡映  $b$  とから生成される二面体群  $D_5$  について考える (下図を参照)。

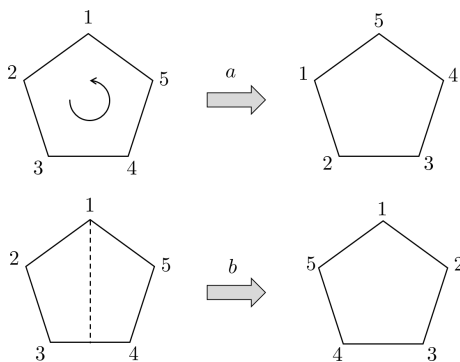


図 1 二面体群  $D_5$  の正五角形への作用

このとき、頂点 1 の  $D_5$  による軌道  $D_5(1)$  を求めよ。また、頂点 1 の安定化群  $\text{Stab}_{D_5}(1)$  を求めよ。また、 $|D_5| = |D_5(1)| |\text{Stab}_{D_5}(1)|$  が成り立っていることを確認せよ。

<sup>\*2</sup> 集合  $G(x)$  は同じ値の元を複数含まないため。有限群  $G$  の元の個数と  $G(x)$  の元の個数は一致するとは限らない。(例えば任意の  $g \in G$  に対して  $g(x) = x$  ならば  $G(x) = \{x\}$  である。)  $G$  の元の個数と  $G(x)$  の元の個数の違いは、以下で述べる軌道・固定部分群定理によって特徴付けられる。

(ii) 正四面体を不変にする回転操作全体は群をなし、正四面体群と呼ばれる。正四面体群の元の個数を求めよ。(ヒント：正四面体の頂点の1つをとってきて、(8)を用いれば良い。)

次に、 $X$  上の同値関係  $\sim$  を  $x \sim y \Leftrightarrow G(x) = G(y)$  で定義する。この同値関係による商集合を  $X/G$  と書く。このとき、 $|X/G|$  は  $X$  上の異なる軌道の個数である。また、 $X$  の部分集合  $\text{Fix}_X(g) := \{x \in X | g(x) = x\}$  を  $g$  の不動点集合という。このとき、以下の等式が成り立つ (Burnside の補題)。

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|. \quad (9)$$

この補題を、以下の順番で証明する。

(iii)  $\sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)|$  を示せ。

(iv)  $x, y \in X$  に対して、 $y \in G(x)$  なら  $|\text{Stab}_G(x)| = |\text{Stab}_G(y)|$  であることを示せ。

(v) (9) を示せ。

ここで、組み合わせ論の問題に Burnside の補題を応用する。まずは、以下の問題を考える。

**問題：**5 個の石からなるブレスレットを考える。それぞれの石は赤、青、緑の3色のいずれかである。回転したり裏返したりして重なるブレスレットを同一視した場合、何種類のブレスレットを作ることができるか？ ■

対称性を考慮しない場合、ブレスレットの種類は  $3^6$  種類になる。このときのブレスレットの集合を  $X$  とする。回転したり裏返したりして重なるブレスレットを同一視することは、 $x \in X$  と、二面体群  $D_5$  による軌道  $D_5(x)$  の元を同一視することに対応している。つまり、回転したり裏返したりしても重ならないブレスレットの種類は、 $|X/G|$  種類である。一方、(9) の右辺はそのまま計算するのは大変だが、(iv) で証明した等式と同様に、 $g, h \in G$  が共役ならば  $|\text{Fix}_X(g)| = |\text{Fix}_X(h)|$  が成り立つので、計算を簡単にできる。

(vi) 上のブレスレットの問題の答えを求めよ。

(vii) フィンランドの伝統的なクリスマスの装飾品にヒンメリと呼ばれるものがある。ヒンメリは藁に糸を通して作られ、天井やクリスマスツリーに吊るして飾られる。



図2 ヒンメリの例

赤、青、緑の3色のストローを合計12本用いて(使わない色のストローがあっても良い)、それらを辺とする正八面体の形のヒンメリを作り、1つの頂点から糸を伸ばして天井に吊るすことを考える。

- (a) 天井に吊るす前のヒンメリは、(糸の通し方や伸びた糸を考慮しなければ) 正八面体群の対称性を持っている。回転して重なるものを同一視した場合、何種類のヒンメリを作ることができるか？
- (b) 天井に吊るした後のヒンメリは、糸の周りに  $\pi/2$  回転する対称性  $C_4$  を持っている。回転して重なるものを同一視した場合、何種類のヒンメリを飾ることができるか？

## 5

この問題では、1次元磁性体のモデルである  $S = 1/2$  Heisenberg スピン鎖を考える。そのためにまずはスピン演算子を定義する。Pauli 行列は以下のように与えられる。

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

スピンの  $L$  個ある糸を考える。このとき、Pauli 行列から、スピン演算子  $S_j^\alpha (j = 1 \cdots L, \alpha = x, y, z)$  を以下のように定義する。

$$S_j^\alpha = \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{j-1 \text{ 個}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \sigma^\alpha}_{j \text{ 番目}} \otimes \underbrace{I \cdots \otimes I}_{L-j \text{ 個}} \quad (11)$$

ただし、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad (12)$$

としたとき、 $A$  と  $B$  のテンソル積は

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix} \quad (13)$$

で定義され、ベクトル

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad (14)$$

のテンソル積を

$$|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\ \beta \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix} \quad (15)$$

と定義したとき、 $A \otimes B$  はこれに

$$(A \otimes B)(|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle) = (A|v_1\rangle) \otimes (B|v_2\rangle) \quad (16)$$

と作用する。

$S = 1/2$  Heisenberg スピン鎖のハミルトニアンは、以下で与えられる。

$$H = J \sum_{j=1}^L \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+1}. \quad (17)$$

ここで、 $\mathbf{S}_j = (S_j^x, S_j^y, S_j^z)$  であり、周期的境界条件  $\mathbf{S}_{L+1} = \mathbf{S}_1$  が課されている。全スピン演算子  $\mathbf{S}_{\text{tot}} := \sum_{j=1}^L \mathbf{S}_j$  はハミルトニアン  $H$  と交換する物理量である。以下では、 $L = 6$  の場合について具体的に調べる。

- (i)  $J < 0$  の場合を考える。このとき  $H$  の基底状態および第一励起状態の固有エネルギーの表式を求めよ。  
また、それらの状態における  $S_{\text{tot}}^z, (S_{\text{tot}})^2$  の値を求めよ。
- (ii)  $J > 0$  の場合を考える。このとき  $H$  の基底状態および第一励起状態の固有エネルギーの表式を求めよ。  
また、それらの状態における  $S_{\text{tot}}^z, (S_{\text{tot}})^2$  の値を求めよ。

(ヒント：ハミルトニアンの特称性をうまく使って、対角化する行列のサイズを小さくすれば良い。まず、全スピン演算子  $S_{\text{tot}}$  が  $H$  と交換する ( $SU(2)$  対称性を持っている) ことから、ハミルトニアンの全固有値は  $S_{\text{tot}}^z = 0$  の空間に全て含まれている (理由を考えてみよ)。更に、ハミルトニアンはスピンの入れ替えに対して二面体群  $D_6$  の対称性を持っている。 $D_6$  の表現から射影演算子を作ることによって、行列をブロック対角化することができる。また、数式処理ソフトなどを適宜用いても構わない。その場合は、用いたコードなどをレポートに貼ること。)

## 6

古典群の同型として  $SU(2) \otimes SU(2) \cong SO(4)$  が古くから知られている。ここでは、同型写像  $f: SU(2) \otimes SU(2) \rightarrow SO(4)$  を具体的に構成したい。以下の問いに答えよ。

- (i)  $SU(2), SO(4), \mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(4)$  はそれぞれ  $M_2(\mathbb{C})$  あるいは  $M_4(\mathbb{C})$  の部分集合としてはどのような集合か。ただし、講義で用いた (数学の教科書の) コンベンションで答えること。 $M_n(\mathbb{C})$  は  $n$  次元複素正方行列全体の成す集合である。
- (ii)  $SU(2) \otimes SU(2)$  のリー環が  $\mathfrak{su}(2) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{su}(2)$  であることを示せ。

この古典群の同型を示すためにまずは、リー代数の同型  $\mathfrak{su}(2) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(4)$  を示す。そのために同型写像  $f: \mathfrak{su}(2) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(4)$  を構成する。ここで、 $f$  として、 $f(A \otimes 1 + 1 \otimes B) = R^\dagger (A \otimes 1 + 1 \otimes B) R$  となるものを考えたいが、 $R$  は  $4 \times 4$  の行列で自由度が 16 と大きく、そのままでは考えにくいので以下の仮定を入れる。 $\mathfrak{su}(2)$  の基底はパウリ行列  $\sigma^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ )<sup>\*3</sup> で、 $|+\rangle = (1, 0)^T$ ,  $|-\rangle = (0, 1)^T$  とする。さらに、Bell 基底  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$  をそれぞれ

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle), & |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), & |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle) \end{aligned} \quad (18)$$

とする。ただし、 $|i\rangle \otimes |j\rangle =: |ij\rangle$  とした。そして、 $R$  を

$$R = (e^{i\theta_1} |\psi_1\rangle, e^{i\theta_2} |\psi_2\rangle, e^{i\theta_3} |\psi_3\rangle, e^{i\theta_4} |\psi_4\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & e^{i\theta_4} \\ 0 & e^{i\theta_2} & e^{i\theta_3} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & -e^{i\theta_3} & 0 \\ e^{i\theta_1} & 0 & 0 & -e^{i\theta_4} \end{pmatrix} \quad (19)$$

であると仮定する。

- (iii)  $f$  が同型写像になる  $R$  を求めよ。  
(iv) 同型  $SU(2) \otimes SU(2) \cong SO(4)$  を示せ。

\*3 ここでは講義で用いた数学の教科書の流儀ではなく、基底を  $-i$  倍した物理の流儀に変更して考える。詳しくは大問 1 の脚注 1 を見よ。

## 参考文献

- Kazuyuki Fujii, Hiroshi Oike, and Tatsuo Suzuki, arXiv:quant-ph/0608186v2 (<https://arxiv.org/abs/quant-ph/0608186v2>)
- Kazuyuki Fujii, arXiv:1111.1487v1 (<https://arxiv.org/abs/1111.1487v1>)