物理数学 III (2020) 第 1 回レポート課題

出題：2020 年 11 月 16 日　締切：2020 年 12 月 7 日

注意事項

1. 問題は全部で 2 問あります。両方の問題に解答してください。
2. 提出先は ITC-LMS (`https://itc-lms.ecc.u-tokyo.ac.jp`) とします。解答した全ての答案を 1 つのファイルにまとめて提出してください。
3. 提出に際しては名前と学籍番号を明記してください。
4. 読みやすい字でお願いします。判別できない文字は採点できません。特に、手書きの答案をデジタル化する場合には画像の劣化などで字が潰れないように注意してください。
5. 締切は 2020 年 12 月 7 日 23 時 59 分です。

1

3 次の対称群 S_3 の元

$$
\begin{aligned}
e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\
c &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

を考える。

(i) 群表（積表）を求めよ。
(ii) S_3 の自明でない部分群を全て求めよ。また、それらの中で不変（正規）部分群であるものを答えよ。
(iii) S_3 の位数 3 の部分群 A_3 を考える。このとき、S_3 の A_3 による左剰余類分解を求めよ。
(iv) S_3 の共役類による分解を求めよ。
(v) S_3 の指標表を答えよ。

6 次元複素ベクトル空間の、S_3 の元をラベルとする正規直交基底 $\{|g_i\rangle\}_{i=1}^{6}$ を考える。ここで $g_1 = e$, $g_2 = a$, $g_3 = b$, $g_4 = c$, $g_5 = d$, $g_6 = f$ とする。ベクトルの内積を $\langle g_i|g_j\rangle$ と書くと、

$$
\langle g_i|g_j\rangle = \begin{cases} 1 & (g_i = g_j) \\ 0 & (g_i \neq g_j) \end{cases} \tag{2}
$$

が成り立つ。このとき、S_3 の左正則表現 ρ_{reg} の作用は、

$$
\rho_{\mathrm{reg}}(g)\,|g_j\rangle = |gg_j\rangle \quad (g \in S_3) \tag{3}
$$

で定義される。また、

$$
[D_{\mathrm{reg}}(g)]_{ij} = \langle g_i|\,\rho_{\mathrm{reg}}(g)\,|g_j\rangle \tag{4}
$$

は、S_3 の左正則表現の表現行列である。

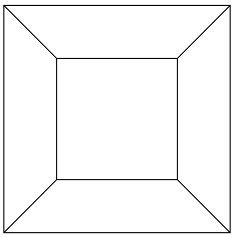
(vi) $D_{\mathrm{reg}}(g_2)$, $D_{\mathrm{reg}}(g_4)$ を求めよ。
(vii) ρ_μ を S_3 の既約表現、χ_μ をその指標とすると

$$
P^{(\mu)} = \frac{\deg \rho_\mu}{6} \sum_{i=1}^{6} \overline{\chi_\mu(g_i)}\rho_{\mathrm{reg}}(g_i) \tag{5}
$$

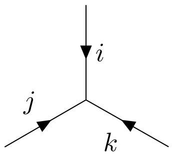
は射影演算子になっている。ただし、$\deg \rho_\mu$ は表現 ρ_μ の次元である。S_3 の 2 次元表現 ρ_E に対する射影演算子 $P^{(E)}$ を $\rho_{\mathrm{reg}}(g)$ を用いて表せ。
(viii) S_3 の 2 次元表現の行列表示 $\{D_E(g_i)\}_{i=1}^{6}$ を求めよ。

2

以下のような格子上の古典統計力学模型を考える。

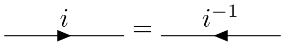


この模型では辺の部分に自由度があり、各辺の自由度はそれぞれ有限群 G の要素でラベル付けされる。このとき、Boltzmann weight は各頂点周りの辺のラベルにのみ依存する。それを $w(i,j,k)$ とすると、



$$= w(i,j,k) = w(j,k,i) = w(k,i,j) \tag{6}$$

と定義される。ただし、辺の向きは、



となるようにする。

このとき、グラフ $\mathcal{G}$ で表されるモデルの分配関数 $Z(\mathcal{G})$ は

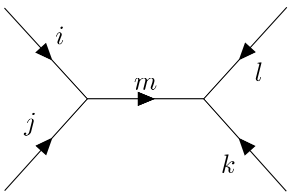
$$Z(\mathcal{G}) = \sum_{\text{各辺の状態}} \prod_{\text{頂点}v} w(i_v, j_v, k_v) \tag{7}$$

で定義される。ただし i_v, j_v, k_v は頂点 v の周りの辺の状態を表す。

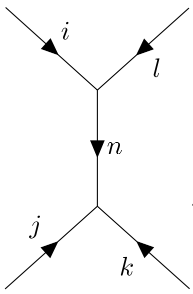
(i) $w(i,j,k)$ が ijk の類関数のとき、式 (6) の関係を満足することを確認せよ。ただし、類関数とは群 G を定義域とする関数 f で、$a, b \in G$ が同じ共役類に属するなら $f(a) = f(b)$ となるものである。

(ii) Boltzmann weight が以下の crossing symmetry を満たすようにしたい。

$$\sum_m$$



$$= \sum_n$$



$$. \tag{8}$$

この関係を式で書くと、

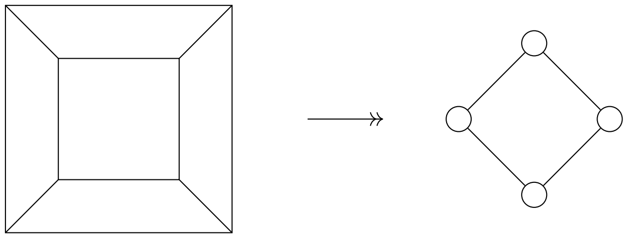
$$\sum_m w(i,j,m^{-1}) w(m,k,l) = \sum_n w(l,i,n^{-1}) w(n,j,k) \tag{9}$$

となる。ここで、

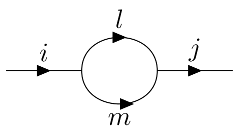
$$w(i,j,k) = \sum_{\mu} A_\mu \chi_\mu(ijk) \tag{10}$$

とすると、これは crossing symmetry を満たすことを示せ。ただし、和は G の全ての既約表現にわたってとるものとし、A_μ は任意定数、χ_μ は表現 ρ_μ の指標とする。

(iii) w が crossing symmetry を満たすとき、以下の図表の変換で分配関数が変わらないことが示せる。変換過程の途中を書け。



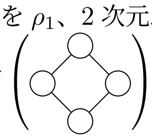
このように、式 (6) のような頂点のみからなる平面グラフは全て

$$T_{ij} = \sum_{l,m}$$


$$= \sum_{l,m} w(i,m^{-1},l^{-1})w(l,m,j^{-1}) \tag{11}$$

からなる 1 次元の "鎖" として書き換えられる。以下では、w は式 (10) で与えられるものとする。G を 3 次の対称群 S_3 としたとき、以下の問に答えよ。

(iv) 行列 T を求め、A_0、A_1、A_2 を用いて表せ。ただし、S_3 の 1 次元恒等表現を ρ_0、1 次元既約表現で ρ_0 でないものを ρ_1、2 次元既約表現を ρ_2 とし、A_0、A_1、A_2 は対応する実数の係数とする。

(v) 分配関数 Z  を計算し、A_0、A_1、A_2 を用いて表せ。

参考文献

Steven H. Simon and Paul Fendley, arXiv:1212.3278v1 (`https://arxiv.org/abs/1212.3278v1`)