非線形方程式とトポロジカル励起

桂　法 称

1. はじめに

物理学の醍醐味のひとつは、一見異なる対象や現象の背後に、共通の構造を見つけることができる点である。空間的にも、エネルギー的にも異なるスケールの階層における現象を、数式を用いて定式化すると、同一の方程式により記述される、ということもよくある。もちろんこれは、人間の自然に対する認識能力、数学的な処理能力の限界から、自ずと似たようなパターンのみが抽出されてしまう、という側面もあるかもしれない。しかし、このようにして得られた方程式自身が、数学的な対象となり深く調べられ、その結果が個々の物理の分野に還元される、といった形で歴史的に進展してきたことも否定できないだろう。

本稿で述べる非線形方程式系は、このような物理と数学の間のフィードバックを通じて発展してきた分野の、まさに好例である。実際、幾つかの基本的な非線形方程式を横糸に、磁性体における磁壁やスキルミオン、超伝導体における渦糸、流体力学におけるソリトン、場の理論におけるモノポールやインスタントン、一般相対論におけるブラックホールなど、全く異なる空間・エネルギースケールの現象をつなげることができる。筆者の専門分野や能力を鑑みると、これら全てに触れることは難しいので、本稿では主に物性物理学からの例を中心に、現象と数理モデルがつながっていく様子を紹介したい。

2. Bogomol'nyi の方法

非線形方程式系の難しさは、線形の場合と異なり、系統的な解法がない点である。時間１次元・空間１次元の完全可積分系に限れば、逆散乱法をはじめとする系統的なアプローチがあり[1]、その背後には佐藤理論などの壮麗な数学がある[2]。しかし、それらはそのまま単純に高次元に拡張できるものではない。ここでは、系統的ではないが高次元にも容易に拡張できる、Bogomol'nyi による解法を紹介する[3][4][5]。また、この方法を用いると、トポロジーとの関係も明確になる。

この手法が適用できる最も簡単な例として、次のようなラグランジアン密度で記述される、時間１次元・空間１次元の系を考えよう。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\phi_t^2 - \phi_x^2) - U(\phi) \qquad (1)$$

ここで、$\phi = \phi(x,t)$ は実スカラー場で、ϕ_t はその時間微分、ϕ_x はその空間微分を表す。また、$U(\phi) \geq 0$ は、その極小値が 0 であるポテンシャルとする。Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_x}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \qquad (2)$$

から、以下の $\phi(x,t)$ の運動方程式が得られる。

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \frac{dU(\phi)}{d\phi} = 0 \qquad (3)$$

ここで、$\phi_{tt} = \partial^2\phi/\partial t^2$, $\phi_{xx} = \partial^2\phi/\partial x^2$ であり、以

下でも同様の記法を用いる。運動方程式 (3) は、一般の $U(\phi)$ については、ϕ に関する非線形項を含むので**非線形 Klein-Gordon 方程式**と呼ばれる。また、運動量密度 $\pi(x,t)=\partial\mathcal{L}/\partial\phi_t$ から、ハミルトニアン密度は、以下で与えられる。

$$\mathcal{H}=\pi\phi_t-\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\phi_t^2+\phi_x^2)+U(\phi) \qquad (4)$$

運動方程式 (3) には Lorentz 不変性があるので、$\phi_t=0$ の静的な解から Lorentz 変換することにより、進行波解も得られる。以下では Bogomol'nyi の方法を用いて、静的な解を求めてみよう。ポテンシャル $U(\phi)$ の正値性から、ある関数 $W(\phi)$ を用いて、

$$U(\phi)=\frac{1}{2}\left(\frac{dW(\phi)}{d\phi}\right)^2 \qquad (5)$$

と書くことができる。このとき、ハミルトニアン密度 (4) から、全エネルギーは、

$$E=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left[\phi_x^2+\left(\frac{dW(\phi)}{d\phi}\right)^2\right] \qquad (6)$$

となる。ここで、不等式 $(\phi_x\mp dW/d\phi)^2\geq 0$ から、

$$E\geq\pm\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\frac{dW(\phi)}{d\phi}\phi_x \qquad (7)$$

が得られる。等号が成り立つ場合は、

$$\phi_x=\pm\frac{dW(\phi)}{d\phi} \qquad (8)$$

が成り立つ場合で、(8) は **Bogomol'nyi 方程式**と呼ばれる。これは ϕ についての一階の微分方程式なので、容易に解くことができる。また、(8) を満たせば、(3) の静的な解であることも確認できる [*1)]。

次に全エネルギーの下限の意味について考えてみよう。(7) の右辺は、合成関数の微分であることから、$\phi_\pm=\phi(x=\pm\infty)$ とすると不等式

$$E\geq\left|W(\phi_+)-W(\phi_-)\right| \qquad (9)$$

が得られる [*2)]。全エネルギーが有限の解であるためには、$\phi_\pm$ は $U(\phi_\pm)=0$ を満たす必要がある。そのような極小点がひとつしか存在しない場合には、$E\geq 0$ という自明な不等式しか得られないが、複数存在する場合には、一般にはそれらの点における $W(\phi)$ の値は異なるため、非自明な不等式が得られる。また、Bogomol'nyi 方程式を解くことにより、これらの極小点をつなぐ解が得られる。また、この解のエネルギーは、$x=\pm\infty$ での場の配位というトポロジカルなデータのみによっている。

3. １次元磁性体と sine-Gordon 模型

前節では、Bogomol'nyi の方法の一般論を導入したが、以下ではその具体的な応用例として、磁性体におけるトポロジカル励起について議論しよう。まず１次元磁性体におけるキンク解を紹介する[6)]。

3.1 １次元強磁性体におけるキンク

図 1(a) のように、１次元格子上に古典的なスピンが並んだ系を考えよう [*3)]。隣り合うスピンの間には、強磁性 Heisenberg 相互作用が働くと仮定する。また、一軸異方性のため、スピンは yz 平面内に束縛されていると考える。このような磁性体の実現例としては、$CsNiF_3$ という物質などが挙げられる[7)8)]。この系のハミルトニアンは、

$$H=-J\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{S}_j\cdot\boldsymbol{S}_{j+1}+A\sum_{j=1}^{N}(S_j^x)^2-g\mu_B H\sum_{j=1}^{N}S_j^z \qquad (10)$$

で与えられる。ここで、$\boldsymbol{S}_j=(S_j^x,S_j^y,S_j^z)$ は j 番目の格子点のスピン、$J>0$ は強磁性相互作用の大きさである。第２項、第３項は、それぞれ異方性エネルギーと外部磁場による Zeeman 項を表す。

*1) (8) の両辺を x で偏微分して $\phi_{xx}=\pm W_{\phi\phi}\phi_x$ が得られる。一方、(5) から、$U_\phi=W_\phi W_{\phi\phi}$ が得られるが、(8) から $\phi_{xx}=U_\phi$、すなわち静的な場合の (3) が得られる。

*2) 絶対値記号となるのは、等号の成り立つ場合は (8) が成立していなければならないことから分かる。

*3) 以下の議論は、一軸的な構造をもつ３次元磁性体の有効的な取り扱いとみなすこともできる。その場合は、同一の yz 面内のスピンはすべて強磁性的に揃っていると仮定する。

また、$A > 0$ は十分大きいと仮定する。

格子上の模型をそのまま扱うことは難しいので、以下ではその連続体近似を考えよう。低エネルギーでは、各スピン $\boldsymbol{S}_j$ はゆっくり変化すると考えられるので、位置 $x = ja$ (a はスピン間の間隔) のなめらかな関数 $\phi(x)$ を用いて、

$$\boldsymbol{S}_j = \boldsymbol{S}(x) = (0, S\sin\phi(x), S\cos\phi(x)) \quad (11)$$

と表される。ここで、異方性エネルギーが大きいため、低エネルギーでは $S_j^x = 0$ であると仮定した。$\boldsymbol{S}_{j+1} = \boldsymbol{S}(x+a)$ をテイラー展開することで

$$\boldsymbol{S}(x+a) = \boldsymbol{S}(x) + a\boldsymbol{S}_x(x) + \frac{a^2}{2}\boldsymbol{S}_{xx}(x) + \cdots \quad (12)$$

が得られるが、これをハミルトニアン (10) に代入することで、連続極限でのハミルトニアン密度

$$\mathcal{H} = E_0\left[\frac{1}{2}\phi_x^2 + m^2(1-\cos\phi)\right] \quad (13)$$

が得られる。ただし、$E_0 = JS^2a,\ m^2 = g\mu_B H/(JSa^2)$ と置き、$\phi(x) = 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) であるときの全エネルギーが 0 となるよう原点をシフトした。上のハミルトニアンで記述される連続系は一般に **sine-Gordon 模型**と呼ばれる。

式 (13) の変分より、停留解は前節の (3) で $\phi_{tt} = 0, U(\phi) = m^2(1-\cos\phi)$ とした場合を満たすことが分かる。したがって、Bogomol'nyi の方法を適用することができる。$U(\phi) = 2m^2\sin^2(\phi/2)$ と変形できることから、Bogomol'nyi 方程式は、

$$\phi_x = \pm 2m\sin\frac{\phi}{2} \quad (14)$$

となる。この微分方程式を解くことで、解は

$$\phi(x) = 4\arctan[e^{\pm m(x-x_0)}] \quad (15)$$

と求まる。この解 (+ 符号の場合) を図示したものが、図 1(c) である。$x = x_0$ を中心に、ϕ の値が 0 から 2π まで変化する様子が分かるだろう。また、元のスピンの配置として表したものが図 1(b) である。このような解は**キンク** (− 符号の場合は反キンク) と呼ばれる。また磁性体の文脈では、**磁壁**や**ドメインウォール**とも呼ばれる。

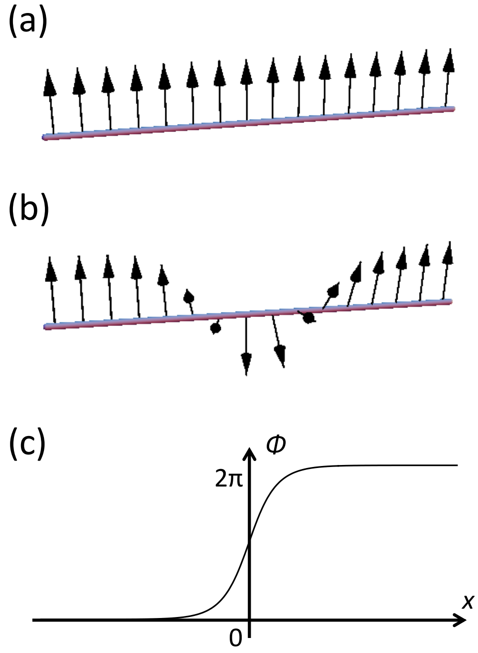

図 1 (a) 1 次元強磁性体の基底状態。(b) キンク解。(c) 式 (15) の関数 $\phi(x)$ のプロット。

キンクのエネルギーも前節の議論から求めることができる。微分方程式

$$\frac{dW(\phi)}{d\phi} = \pm 2m\sin\frac{\phi}{2} \quad (16)$$

を解くことで、$W(\phi) = \mp 4m\cos(\phi/2)$ と求まるので、(9) から、キンクのエネルギーは $E = 8mE_0$ である。これはもちろん、一様な解 ($\phi = 2\pi n$ で一定の強磁性状態) に比べて高いエネルギーをもつ励起状態であるが、$x \to -\infty$ で $\phi = 0$、$x \to +\infty$ で $\phi = 2\pi$ という境界条件の解の中では最もエネルギーが低い。また、(3) の形で時間依存性を考えることもできるが、次のトポロジカル電荷

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x} \quad (17)$$

が $x = \pm\infty$ での境界条件のみによって決まる保存量であるため、キンク解は強磁性基底状態に落ち込むことなく、安定に存在する励起であることが分かる。このことから、**トポロジカル励起**と呼ばれることも多い。

Bogomol'nyi の方法の応用は、sine-Gordon 模

型に限った話ではない。例えば、ポテンシャルが $U(\phi)=\lambda(\phi^2-1)^2/4$ で与えられる場合は、**ϕ^4 模型**と呼ばれるが、この場合にも Bogomol'nyi の方法を用いて、キンク・反キンク解を構成できる。また、筆者は最近、sine-Gordon 模型と ϕ^4 模型が結合した多成分系にこの手法を適用し、キンクと反キンクが結合したトポロジカル励起が安定に存在することを示した[9]。

3.2 カイラルソリトン格子

sine-Gordon 模型の例では、キンク解はあくまでエネルギーの高い励起状態だったが、このようなトポロジカルな構造をもつ解が基底状態となる場合はあるだろうか?答えは YES で、スピン間に

$$H_{\rm DM}=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{D}\cdot(\boldsymbol{S}_j\times\boldsymbol{S}_{j+1}) \tag{18}$$

という反対称相互作用(Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用、以下 DM 相互作用と略)が働く場合には、キンクが格子上に並んだ**カイラルソリトン格子**と呼ばれる基底状態が実現する。このような構造は、$\mathrm{Cr_{1/3}NbS_2}$ という磁性体において実際に観測されており[10]、最近の物性物理におけるホットなトピックのひとつである[11]。

隣り合うスピンを揃えようとする強磁性 Heisenberg 相互作用に対して、DM 相互作用は隣り合うスピンを直交させようとする。これらが共存する、ハミルトニアン $H+H_{\rm DM}$ を考えよう(H は (10) のもの)。以下では、$\boldsymbol{D}=(D,0,0)$ とする。式 (11) を代入し、連続体近似を用いると、ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H}+\mathcal{H}_{\rm DM}=E_0\left[\frac{1}{2}\phi_x^2-q_0\phi_x-m^2\cos\phi\right] \tag{19}$$

となることが分かる。ただし、$q_0=D/(Ja)$ である。この場合の停留解を求めることは可能であるが、一般解はヤコビの楕円関数を用いて表されるため、そう単純ではない *4)。ここでは、非線形性の強さを表す m^2 が大きい場合・小さい場合

*4) 詳細は、成書[11] を参照されたい。カイラルソリトン格子からの素励起についても詳しい解析がある。

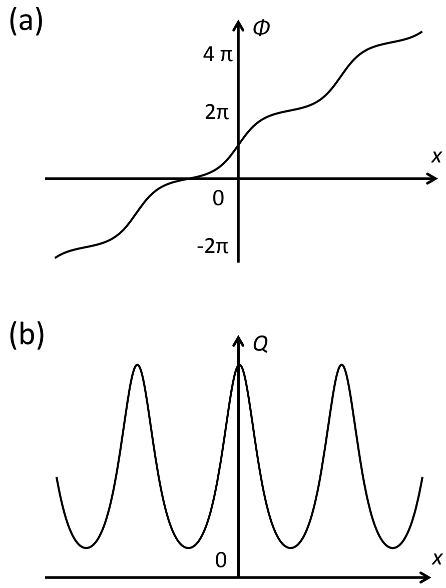

図 2 (a) カイラルソリトン格子に対応する $\phi(x)$。(b) トポロジカル電荷の空間分布 $\mathcal{Q}(x)$。

の両極限を考えることで、その間にソリトン格子が現れることを納得してもらおう。まず、m^2 が小さい場合には、(19) の括弧内第1項・第2項を平方完成することで、$\phi_x=q_0$ の場合、つまり $\phi(x)=q_0x+\mathrm{const.}$ と一様に変化する場合に最もエネルギーが低くなる。これは元のスピン系に戻ると、スピンが yz 面内で回転する場合に相当し、**らせん磁気構造**と呼ばれる。一方で、m^2 が大きい場合は、磁場 H が強い場合に相当するので、明らかに $\phi(x)=2n\pi$ という強磁性状態が基底状態である。この間の中間的な m/q_0 の場合には、図 2(a) で示すソリトン格子が現れる。また、(17) で定義したトポロジカル電荷を局所的に

$$\mathcal{Q}(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x} \tag{20}$$

と定義すれば、キンクの分布を可視化できることが分かるだろう。図 2(b) に $\mathcal{Q}(x)$ のプロットを示した。

4. 2次元磁性体と非線形シグマ模型

続いて2次元磁性体における**スキルミオン(ス**

カーミオン）と呼ばれる励起について紹介しよう。スキルミオンは元々、Skyrme[12] によって考えられた３次元の模型に対するものなので、本来はランプあるいは２次元スキルミオンと呼ぶべきものだが、以下ではおおらかに２次元の場合も、単純にスキルミオンと呼ぶことにする[13]。

4.1 ２次元強磁性体におけるスキルミオン

図 3(a) のように、２次元正方格子上に古典的なスピンが並んだ系を考えよう。前節と同様に、隣り合うスピンの間には、強磁性 Heisenberg 相互作用が働くと仮定する。この系のハミルトニアンは、

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \qquad (21)$$

で与えられる。ここで、$J > 0$ は強磁性相互作用の大きさであり、i, j の和は隣り合う格子点についてのみとる。また、前節とは異なり、異方性エネルギーは考えないので、スピンは３次元空間の任意の方向を向くことができる。

上のハミルトニアンの連続体近似を考えよう。まず、格子点の位置 j を連続変数 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ で表す。次に、各スピン $\boldsymbol{S}_j$ はゆっくり変化すると仮定すると、なめらかな関数 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ を用いて、

$$\boldsymbol{S}_j = S\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = S(n^1(\boldsymbol{r}), n^2(\boldsymbol{r}), n^3(\boldsymbol{r})) \quad (22)$$

と表される。ここで S はスピンの大きさであり、$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ は、$|\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})| = 1$ に規格化されたベクトル場をあらわす。この $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ を用いて、ハミルトニアンは、

$$H \simeq -\frac{JS^2}{2a^2} \int dxdy\, \boldsymbol{n}(x, y) \cdot [\boldsymbol{n}(x+a, y) + \boldsymbol{n}(x-a, y) + \boldsymbol{n}(x, y+a) + \boldsymbol{n}(x, y-a)] \quad (23)$$

と書き換えられる。これにテイラー展開

$$\boldsymbol{n}(x \pm a, y) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \pm a\boldsymbol{n}_x(\boldsymbol{r}) + \frac{a^2}{2}\boldsymbol{n}_{xx}(\boldsymbol{r}) + \cdots$$

(y 方向についても同様) を代入して、部分積分することでハミルトニアン密度

$$\mathcal{H} = \frac{E_0}{2}(\boldsymbol{n}_x \cdot \boldsymbol{n}_x + \boldsymbol{n}_y \cdot \boldsymbol{n}_y) \qquad (24)$$

が得られる。ただし、$E_0 = JS^2$ である。このようなハミルトニアンで記述される系を、**非線形シグマ模型**と呼ぶ。式 (24) は、一見、多成分自由場のハミルトニアン密度と変わらないように見えるが、$\boldsymbol{n}$ の長さが各点で 1 であるという拘束条件として、非線形性が導入されている。したがって、停留解を求めることは容易ではないが、Belavin と Polyakov による華麗な解法がある[14]。以下で見るように、これも Bogomol'nyi の方法と同様に、「平方完成」を用いるのが基本的なアイデアである。

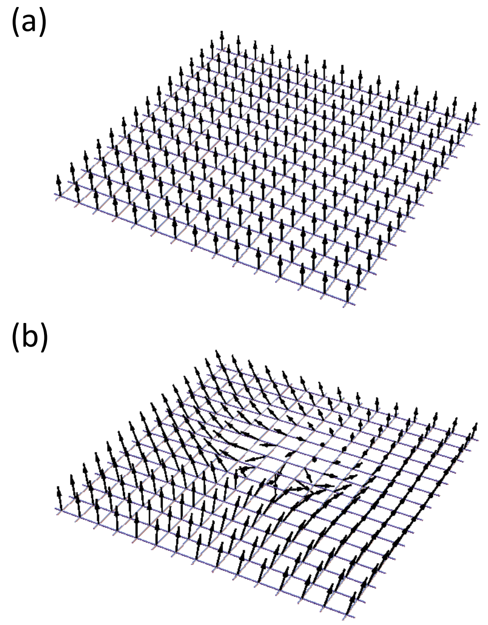

図 3 (a) ２次元強磁性体の基底状態。(b) スキルミオン解。ただし、 式（32）で $a = 0$, $\chi = 0$ とした。

系の全エネルギーは (24) の二次元面内での積分で与えられる。有限のエネルギーの解のみを議論したいので、原点から十分離れたところでは、$\boldsymbol{n}$ は一様な強磁性状態、たとえば $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$ であるとしよう。この境界条件の下で、次の不等式に着目する。

$$(\boldsymbol{n}_a \pm \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_b) \cdot (\boldsymbol{n}_a \pm \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_b) \geq 0 \qquad (25)$$

ここで、$(a, b) = (x, y)$ or (y, x) である。 上の左辺を展開すると 4 つの項が現れるが、外積の性質 $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ や $\boldsymbol{n}_x \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_y \cdot \boldsymbol{n} = 0$ ($\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = 1$ を偏微分するこ

とで得られる) を用いることで、結局

$$\boldsymbol{n}_x \cdot \boldsymbol{n}_x + \boldsymbol{n}_y \cdot \boldsymbol{n}_y \geq \pm 2\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n}_x \times \boldsymbol{n}_y) \quad (26)$$

というきれいな関係が得られる。これを (24) に代入し、２次元面内で積分することで、全エネルギーについての不等式

$$E = \int dxdy\, \mathcal{H} \geq 4\pi E_0 |Q| \quad (27)$$

が得られる。ただし、Q は以下で与えられる。

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int dxdy\, \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n}_x \times \boldsymbol{n}_y) \quad (28)$$

この Q が、xy 面内（に無限遠点を加えてコンパクト化した球面）から、$\boldsymbol{n}$ ベクトルが値をとる空間である２次元球面 (S^2) への写像度を表すものになっていることは、面積分のパラメター表示から明らかだろう *5)。したがって、Q は整数に値をとり、１次元の場合の (17) と同様にトポロジカル電荷になっている。

不等式 (25) で等式が成り立つ場合から、非線形シグマ模型の場合の、Bogomol'nyi 方程式

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_x + \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_y = 0 \\ \boldsymbol{n}_y - \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_x = 0 \end{cases} \quad (29)$$

が得られる。ただし、式 (25) の + 符号の場合に限定した *6)。この方程式は、$\boldsymbol{n}$ について非線形だが、Belavin と Polyakov は以下の変換により、よく知られている方程式に帰着することを見出した。x, y から複素座標 $z = x + \mathbf{i}y$ を導入する。また、ベクトル場 $\boldsymbol{n}$ から、次の関数

$$R = \frac{n^1 + \mathbf{i}n^2}{1 + n^3} = w^1 + \mathbf{i}w^2 \quad (30)$$

を定義する。ただし、w^1, w^2 はそれぞれ、R の実部・虚部を表す。少々面倒な計算をすると、Bogomol'nyi 方程式 (29) が成り立てば、

$$\frac{\partial w^1}{\partial x} = \frac{\partial w^2}{\partial y}, \quad \frac{\partial w^2}{\partial x} = -\frac{\partial w^1}{\partial y} \quad (31)$$

が成り立つことが分かる。これは複素関数論で学ぶ、Cauchy-Riemann の関係式そのものである。したがって、R は z の正則関数である（$\bar{z} = x - \mathbf{i}y$ によらない）ことが分かる *7)。

$R = R(z)$ を決めれば、式 (30) を通じてベクトル場 $\boldsymbol{n}$ を求めることができる *8)。たとえば、

$$R(z) = \frac{\lambda e^{\mathbf{i}\chi}}{z - a} \quad (32)$$

(λ, χ, a は実数) をとれば、図 3(b) のような配置が解として得られる。これをスキルミオン解とよぶ。$R(z)$ として多数の極をもつ関数を選べば、多重スキルミオン解となる。

4.2 スキルミオン格子

スキルミオン解は、非自明なトポロジカル電荷をもつため、非線形シグマ模型の基底状態ではない。しかし、１次元の場合と同様に、このようなトポロジカルな構造をもつ解が基底状態となる場合がやはり存在する。これは、式 (18) と同様の DM 相互作用と外部磁場の効果を考えた場合である。２次元ではこれらの項は、連続体近似で

$$\mathcal{H}_{\mathrm{DM}} + \mathcal{H}_{\mathrm{mag}} = d\,\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}) + h(1 - n^3) \quad (33)$$

という項を生む。ここで、d は DM 相互作用の大きさに比例する定数、h は外部磁場に比例する定数、$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ である *9)。これらの項も含めた、ハミルトニアン密度 $\mathcal{H} + \mathcal{H}_{\mathrm{DM}} + \mathcal{H}_{\mathrm{mag}}$ を Belavin-Polyakov がやったように、うまく解くことは難しいが、解に適当な ansatz を課すことで、一変数の微分方程式を解くことに帰着させることができる。これは数値的には容易に解くことができ、実際に非自明なトポロジカル電荷をもつ解の存在が確認されている[15]。また、解の存在に関する数学的な研究も行われているようである[16]。

このようなスキルミオン解の基底状態は、実際に $Fe_{1-x}Co_xSi$ や FeGe、Cu_2OSeO_3 などの磁性

*5)　$\boldsymbol{r}$ が２次元面内を動くとき、$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ が何回 S^2 を覆うかをカウントしている。この被覆数とホモトピー群 $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ の元が対応する。

*6)　(29) の２式が等価であることは、上の式と $\boldsymbol{n}$ との外積をとることで確認できる。

*7)　式 (25) の − 符号の方を選んだ場合、同様の議論により、R は z の反正則関数であるという結論が得られる。

*8)　正確には、式 (31) が成り立てば、式 (29) が成り立つことを言う必要がある。これを示すには、結局ハミルトニアン密度を R とその複素共役を用いて表した方が速い[4][13]。

*9)　ただし、$\boldsymbol{n}$ は、x, y のみの関数であり z には依存しない。

体の薄膜で、ローレンツ電子顕微鏡を用いて観測されている[17)18)19)]。ただし、そこでは単独のスキルミオンが存在するのではなく、むしろそれらが格子を組んだ状態が安定に存在する。これは、前節の１次元でのカイラルソリトン格子の自然な拡張と見なすこともできるだろう。このような状態は**スキルミオン格子**、あるいはスキルミオン結晶と呼ばれ、現在理論的にも実験的にも盛んに研究が行われている。今後は、このような系での低エネルギー励起やダイナミクスの研究などが重要なテーマとなってくるだろう。

おわりに

非線形方程式におけるトポロジカルな構造をもつ解について、主に磁性体での例から紹介した。特に物性でよく扱われる格子上の模型と、場の理論で通常議論される連続体の模型の間の関係をうまく繋げるよう努力したつもりである。Bogomol'nyiの方法というある種の「平方完成」により、系のトポロジカルな励起を不等式の形でうまく特徴付けられることが分かるだろう。紙面の制約で触れることができなかったが、渦糸やモノポール・インスタントンなどゲージ場が絡んだ場合には、より多彩なトポロジカル励起が現れる。またこれらについても、ADHM 構成法[4)] などの数学的にエレガントな解法が存在する。

場の理論の古典解におけるトポロジーは、実空間から秩序パラメターの空間への写像に関するものであったが、最近の物性物理の文脈では、別の意味でのトポロジーが注目されている。それは、波数空間から (Bloch) 波動関数への写像に関するものである。そのような観点からいわゆる、トポロジカル絶縁体・超伝導体が盛んに研究されている[20)21)22)]。また、このふたつのトポロジーは全く独立ではなく、たとえばトポロジカル絶縁体・超伝導体における欠陥を考える場合などには、両者は密接に関係してくる[23)]。そのような系での分数電荷やマヨラナ粒子なども、最近の物性物理におけるホットなトピックのひとつである。それら複合系についても、物理的に新奇な現象・数学的に豊かな構造が隠れていれば面白いと思う。

参考文献

1) 和達三樹：『非線形波動』, 岩波書店 (1992).
2) 三輪哲二・神保道夫・伊達悦朗：『ソリトンの数理』, 岩波書店 (2007).
3) R. Rajaraman: *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland (1982).
4) N. Manton and P. Sutcliffe: *Topological Solitons*, Cambridge University Press (2004).
5) T Vachaspati: *Kinks and Domain Walls*, Cambridge University Press (2006).
6) 十河清：「数学と物理学のあいだ」, http://www.kitasato-u.ac.jp/sci/resea/buturi/hisenkei/sogo/mathphys.pdf
7) J. K. Kjems and M. Steiner: *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1137-1140 (1978).
8) H. J. Mikeska: *J. App. Phys.* **52**, 1950-1955 (1981).
9) H. Katsura: *Phys. Rev. D*, **89**, 085019 (2014).
10) Togawa et al.: *Phys. Rev. Lett.* **108**, 107202 (2012).
11) J. Kishine and A. S. Ovchinnikov: *Theory of Monoaxial Chiral Helimagnet*, Solid State Physics (Elsevier, Academic Press, 2015) Vol. 66, Chap. 1.
12) T. A. Skyrme: *Nuclear Physics* **31** (1962) 556.
13) 新田宗土：http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~soken.editorial/sokendenshi/vol13/netsuba2012/p23-12-Nitta.pdf
14) A. A. Belavin and A. M. Polyakov: *JETP Lett.* **22**, 245-247 (1975).
15) A. Bogdanov: *JETP Lett.* **62**, 247-251 (1995).
16) C. Melcher: Proc. Roy. Soc. A **470**, 20140394 (2014).
17) 小野瀬佳文・于秀珍・金澤直也・松井良夫・永長直人・十倉好紀：固体物理 **45**, 541-547 (2010).
18) 望月維人・永長直人：固体物理 **49**, 125-135 (2014).
19) 望月維人・関真一郎：日本物理学会誌 **69**, 132-139 (2014).
20) 安藤陽一：『トポロジカル絶縁体入門』, 講談社 (2014).
21) 齊藤英治・村上修一：『スピン流とトポロジカル絶縁体』, 共立出版 (2014).
22) 固体物理 特集号 **45**, No. 11 (2010).
23) J. C. Y. Teo and C. L. Kane: *Phys. Rev. B*, **82**, 115120 (2010).

（かつら・ほうしょう，東京大学）