

量子統計力学と恒等式

桂 法 称

はじめに

量子力学と統計力学，この二つの分野に学部生時代に強く惹かれたのは，これらが高校時代に学ぶ物理と最も遠くかけ離れて見えたためだろう。量子力学の講義では，ミクロなばねの問題を生成・消滅演算子を使ってデジタルなゲームのように解いていき，実際にデジタルな（量子化された）エネルギーが出てくることを学んだ。また統計力学の講義では，ゴムは温めると縮むことを，剛体棒の折れ曲がり方のパターンを数えることにより説明できると習った。このように，一見無関係に見える代数や組み合わせのような数学的概念が，物理現象を説明するために不可欠であることを不思議に思った記憶がある。

本稿では，量子統計力学の話題と組み合わせ論や複素関数の留数積分などの意外な数学が，思わぬ接点を持ち結びつく様子を，幾つかの例を通じて紹介したい。そこでは，純粋数学とその応用先としての物理の問題，という単純な図式ではなく，もっとダイナミックな関係が見出せると思う。両者の言語を行きつ戻りつしている間に非自明な結果が得られる快感を味わって頂ければ幸いだ。

1. 分割パズル

量子統計力学の観点から，一見無関係に見える整数の分割に関する問題を解いてみよう。整数の

分割とは，自然数 $n (> 0)$ をいくつかの自然数の和で表すやり方のことである。たとえば， $n = 5$ のとき次の 7 通りの表し方がある。

$$\begin{aligned} 5 &= 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1 \quad (1) \end{aligned}$$

ここでは足し算の順序は問わないこととする。整数の分割は，一見単純な「足し算」の問題に見えるが，オイラーの研究に端を発する由緒正しい数論の問題である¹⁾。分割の問題の難しさは，「分割数」を考えてみるとよく分かる。自然数 n の分割数 $p(n)$ とは，分割のやり方が何通りあるかを表す関数で，たとえば，上の $n = 5$ のとき， $p(5) = 7$ である。 n が小さい場合には，この例のように具体的に数えることができるが， n が大きくなると $p(10) = 42$ ， $p(50) = 204226$ ，... となり途端に難しくなってくる^{*1)}。

分割の自然な拡張として，今度は制限付きの分割というものを考えてみよう²⁾。(1)のうちで，異なる自然数の和で表せる場合は， $5 = 4+1 = 3+2$ の 3 通りである。一方で，奇数のみの和で表せる場合は $5 = 3+1+1 = 1+1+1+1+1$ の 3 通りである。前者を「ストリクトな分割」，後者を「奇数による分割」と呼ぶ。不思議なことに両者はともに 3 通りである。 $n = 6$ の場合を試しても，

*1) *Mathematica* には `PartitionsP[n]` という関数で， $p(n)$ は組み込まれている。

両者のやり方の総数は一致している *2). これは偶然ではなく、実はオイラーによりこの二通りの制限付き分割数は必ず等しいということが示されている。つまり、自然数 n のストリクトな分割数を $p_{\text{str}}(n)$ 、奇数による分割数を $p_{\text{odd}}(n)$ とすれば、

$$p_{\text{str}}(n) = p_{\text{odd}}(n) \quad (2)$$

が必ず成り立つことを意味する。

2. 母関数と分配関数

上のパズルの正統的な解き方は、ストリクトな分割と奇数による分割との間の一対一対応を見つけることだが、筆者にはすぐに見えてこない。そこで、別のアプローチとして母関数というものを考えてみることにしよう。形式的な変数 q を導入し、 $p_{\text{str}}(n)$ の母関数を $Z_F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\text{str}}(n)q^n$ 、 $p_{\text{odd}}(n)$ の母関数を $Z_B(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\text{odd}}(n)q^n$ とべき級数の形で定義する。これらは制限付き分割数を関数に埋め込んだものと考えられる。したがって二つの母関数の間の恒等式 $Z_F(q) = Z_B(q)$ が示せれば、示したかった関係 (2) が示せる。

まだ量子統計力学との関係は見えてこないかもしれない。実は以下で見るように、 $Z_F(q)$ はあるフェルミオン系の、 $Z_B(q)$ はあるボゾン系の大分配関数とみなせるのだ。大分配関数とは、**グランドカノニカル分布**における確率の規格化因子で、注目する（多粒子）系の i 番目の固有状態のエネルギーを E_i 、その粒子数を N_i とすると

$$\Xi(\beta, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\beta E_i + \beta \mu N_i) \quad (3)$$

で与えられる³⁾。ここで、 β は系と平衡にある環境系の逆温度、 μ は化学ポテンシャルである。この確率分布では、 (E_i, N_i) に対応する多粒子状態の出現確率は、 $e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} / \Xi(\beta, \mu)$ で与えられる。

まず、 $Z_F(q)$ に対応する系として、一粒子の固

*2) ストリクトな分割は $6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 2 + 1$ で4通り、奇数による分割は $5 + 1 = 3 + 3 = 3 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ で4通りである。

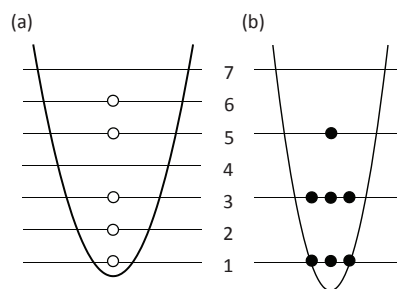


図 1 (a) フェルミオン系と (b) ボゾン系に対応する調和ポテンシャルと一粒子準位。エネルギー $E = 17\hbar\omega$ で、占有数が $(1,1,1,0,1,1,0, \dots)$ のフェルミオン系の多粒子状態は、同じエネルギーで占有数が $(3,3,1,0, \dots)$ のボゾン系の状態に対応する。

有エネルギーが $\epsilon_j = j\hbar\omega$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) で与えられるフェルミオン系を考えよう。これは、一次元調和ポテンシャル中の粒子集団と考えることもできる (図 1(a))。フェルミオン同士が相互作用しない場合は、多体の固有状態は、一粒子波動関数を反対称化することにより得られる。その帰結として、各準位には高々 1 個のフェルミオンしか入れない。

このルール (**パウリの排他律**) が、前節での分割の話と関係するというに気付かれたらどうか? $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ が n_1, n_2, n_3, \dots 個のフェルミオンにより占有されている場合、対応する状態のエネルギーは、 $E = (n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots)\hbar\omega$ となる。しかしフェルミオン系では n_j は 0 か 1 かに限られるので、あるエネルギー $E = n\hbar\omega$ を与えたとき、対応する（多粒子）状態は n の分割のうちストリクトな分割で書けるものに限られる。また、その総数は $p_{\text{str}}(n)$ である。したがって、(3) から

$$\Xi(\beta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\text{str}}(n) e^{-n\beta\hbar\omega} \quad (4)$$

であることが分かる。 $q = e^{-\beta\hbar\omega}$ としてやれば、これは $Z_F(q)$ そのものである。

一方で統計力学の講義で習うように、 $\Xi(\beta, \mu)$ は次のようにして計算することができる³⁾。

*3) グランドカノニカル分布では、系の全粒子数が固定されていないので、このような計算が極めて簡単になる。

$$\begin{aligned}\Xi(\beta, \mu) &= \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 \cdots \exp \left[-\beta \sum_{j=1}^{\infty} (\epsilon_j - \mu) n_j \right] \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} (1 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)})\end{aligned}\quad (5)$$

(4) と (5) を見比べてやれば、ストリクトな分割の母関数が次のように求まる。

$$Z_F(q) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + q^j) \quad (6)$$

さて、次は $Z_B(q)$ に対応する系として、一粒子の固有エネルギーが $\epsilon_j = (2j-1)\hbar\omega$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) で与えられるボゾン系を考えよう。こちらも調和ポテンシャル中のボゾン系と考えられるが、 ϵ_j は $\hbar\omega$ の奇数倍の値しかとれない (図 1(b))。この系で $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ が n_1, n_2, n_3, \dots 個のボゾンにより占有されている場合、対応する状態のエネルギーは、 $E = (n_1 + 3n_2 + 5n_3 + \dots)\hbar\omega$ となる。ボゾン系では各準位にいくらでも粒子が入ることができるので、与えられたエネルギー $E = n\hbar\omega$ に対応する (多粒子) 状態は、 n の奇数による分割で表せることが分かるだろう。したがって (3) から

$$\Xi(\beta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\text{odd}}(n) e^{-n\beta\hbar\omega} \quad (7)$$

となり、これが $Z_B(q)$ に一致する。また (5) と同様に、このボゾン系の大分配関数を計算すると

$$\Xi(\beta, \mu) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} \quad (8)$$

となるので、(7) と (8) を見比べて、以下を得る。

$$Z_B(q) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2j-1}} \quad (9)$$

分割の母関数という、純粋に組み合わせ論的な問題を眺めているうちに、思いがけず調和ポテンシャル中の同種粒子の問題が浮かび上がってきた。しかも (8) の $\Xi(\beta, \mu)$ には、 $e^{\beta\mu}$ のべき乗の係数に、「 n の N 個の奇数による分割の総数」という、より細かい情報さえも埋め込まれているのである。

3. パズルの解答

残る関門は母関数同士の一致を示すことである。 $|q| < 1$ と思い、両者をテイラー展開してやれば q の低次の項について一致することは簡単に分かる*4)。これが一般に成立することも

$$\begin{aligned}Z_F(q) &= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2j}}{1 - q^j} = \frac{\prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j})}{\prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)} \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2j-1}} = Z_B(q)\end{aligned}\quad (10)$$

と無限積であることから、約分だけで示せる。

このようにして、(2) は示せた。さらに踏み込んで、ストリクトな分割と奇数による分割の間の一対一対応を示すには、フェルミオン系とボゾン系のフォック空間の対応を見てやればよい。フェルミオン系で $\epsilon_j = j\hbar\omega$ の準位に粒子を生成する演算子を c_j^\dagger 、ボゾン系で $\epsilon_k = (2k-1)\hbar\omega$ の準位にひとつ粒子を生成する演算子を b_{2k-1}^\dagger とすると、 j が奇数のときは素直に $c_j^\dagger \rightarrow b_j^\dagger$ と対応させてやればよい。問題となるのは、 j が偶数のときだが、この場合は必ず自然数 k, ℓ を用いて $j = (2k-1)2^\ell$ と書けるので、 $c_j^\dagger \rightarrow (b_{2k-1}^\dagger)^{2^\ell}$ と対応させる。逆にボゾン系からフェルミオン系への対応は、各準位の占有数を二進数表示してやれば一意に定まる。図 1 にこの対応の一例を示した。本質的に同じ対応関係は、組み合わせ論では「グレイシャー対応」として知られている²⁾。

なお本稿では触れられないが、朝永-ラッティンジャー液体論として知られる一次元フェルミオン系のボゾンを用いた記述⁴⁾⁵⁾ では、上とは異なるボゾン・フェルミオン対応が用いられる。しかし、そこでもヤコビの三重積公式として知られる

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + zq^n)(1 + z^{-1}q^{n-1})$$

という不思議な恒等式が現れる⁶⁾。また、より複雑な制限の付いた分割に関する恒等式は、共形場

*4) たとえば q の 10 乗までなら、 $Z_F(q) = Z_B(q) = 1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 3q^5 + 4q^6 + 5q^7 + 6q^8 + 8q^9 + 10q^{10} + \dots$

理論や可解格子模型などの理論物理学の様々な文脈に手を変え品を変え現れる。

4. 留数積分と恒等式

前節までの話は比較的良く知られている話だが、少し話題を変えて最近の筆者の研究⁷⁾に顔を出した不思議な恒等式を紹介しよう。

任意の複素数 q, z_1, z_2, \dots, z_N について、

$$\sum_{i=1}^N z_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{z_i - qz_j}{z_i - z_j} = \sum_{i=1}^N z_i \quad (11)$$

が成立する。ただし z_1, z_2, \dots, z_N は相異なる。

左辺の複雑な積の和が右辺では単純な z_i に関する和にすり変わる、なんとも不思議な式である。 $N = 2$ の場合に確認することは、

$$z_1 \frac{z_1 - qz_2}{z_1 - z_2} + z_2 \frac{z_2 - qz_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1^2 - z_2^2}{z_1 - z_2} = z_1 + z_2$$

と簡単である。計算力に自信のある人なら、 $N = 3$ の場合も確認できるかもしれないが、 $N \geq 4$ となると絶望的だろう。筆者自身は、ある量子多体系の問題を解く過程で偶然この恒等式を発見し、 $N \geq 4$ の場合も数式処理ソフトにより確認して確信に至ったのだが、ここでは実際の時系列とは逆にまず数学的な証明を与えよう。

$q = 1$ のとき、(11) は自明に成立しているのだから、 $q \neq 1$ として、次のような複素関数 $f(z)$ を考える。

$$f(z) = \frac{1}{1-q} \prod_{1 \leq j \leq N} \frac{z - qz_j}{z - z_j} \quad (12)$$

z_1, \dots, z_N は相異なるので、 $f(z)$ は複素平面上で $z = z_1, \dots, z_N$ に一位の極を持つことが分かる。図 2 に示した積分路 C 上の $f(z)$ の複素積分は、有名なコーシーの積分公式を用いてやれば、 $z = z_1, \dots, z_N$ での留数の和から (11) の左辺となることが分かるだろう。一方で、 C の外側には特異点は存在しないので、積分路を図 2 のように変形しても積分の値は変わらず、無限遠点の周りを負の向きに回る複素積分にまで変形できる。無限遠点

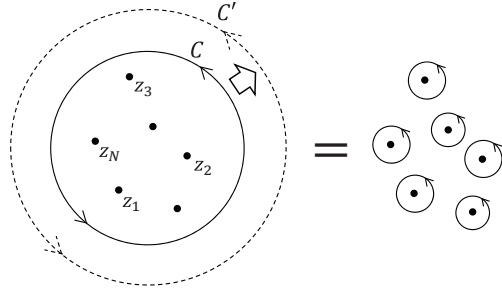


図 2 $f(z)$ の極と積分路 C . 積分路を C から C' に変えても、 $\oint f(z) \frac{dz}{2\pi i}$ の値は変わらない。

での留数は、 $\text{Res} f(\infty) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$ であることから、簡単な計算により (11) の右辺を得る。

もちろん、両者は等しいので (11) が得られた。ほぼ同じ方針で、次のような恒等式を示すこともできるので、興味のある方には挑戦して頂きたい。

問題 :⁸⁾ 任意の複素数 q, z_1, \dots, z_N について、

$$\sum_{i=1}^N \prod_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{q - z_j}{z_i - z_j} = 1 \quad (13)$$

5. サイン二乗変形

留数積分の応用は、松原周波数に関する和の計算⁹⁾ など量子統計力学の問題にはよく顔を出し、さほど目新しいものではない。実は、(11) はもっと思いがけないところに現れる。ある二つの異なる一次元量子系の基底状態 (最低エネルギー状態) が等しいという事実から浮かび上がってくるのだ。まず以下のようなハミルトニアンを考える。

$$\mathcal{H}_0 = - \sum_{j=1}^L t (c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j) \quad (14)$$

ここで $c_j^\dagger (c_j)$ は、図 3(a) のリングの格子点 j にフェルミオンを生成 (消滅) する演算子で、反交換関係を満たす。また、 $c_{L+1}^{(\dagger)} = c_1^{(\dagger)}$ の周期的境界条件を課す。この模型はタイトバインディング模型としてよく知られている。 \mathcal{H}_0 はフーリエ変換により簡単に対角化され、 $d_k := \sum_{j=1}^L e^{-ikj} c_j / \sqrt{L}$ に

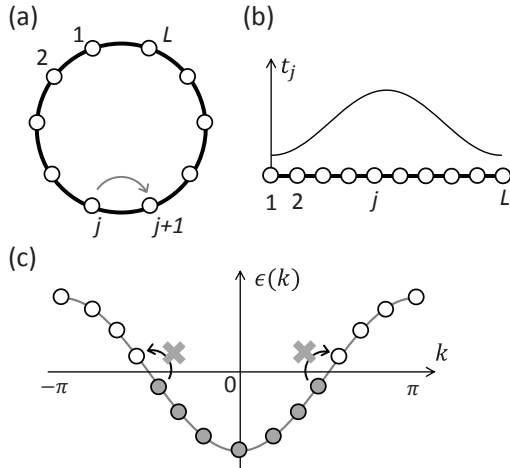


図3 (a) リング状の格子とその上でのホッピングのイメージ(矢印). (b) 開放端を持つ一次元格子. 飛び移り積分 t_j は格子点 j に依っている. (c) \mathcal{H}_0 の基底状態 $|\text{FS}\rangle$. \mathcal{H}_\pm による遷移はフェルミ海の端では起こらない.

より

$$\mathcal{H}_0 = \sum_k \epsilon(k) d_k^\dagger d_k, \quad \epsilon(k) = -2t \cos k \quad (15)$$

と表せる. ここで波数 k ($-\pi \leq k < \pi$) の値は周期的境界条件から $2\pi/L$ の整数倍に限られ, $\epsilon(k)$ は \mathcal{H}_0 の一粒子の固有エネルギーである.

この系の多粒子基底状態を求めよう. 以下では簡単のため L を偶数とし^{*5)}, 粒子数 $N = L/2$ の場合を考える. このとき \mathcal{H}_0 の基底状態は, $\epsilon(k)$ が負の k に全てフェルミオンを詰めた状態

$$|\text{FS}\rangle = \prod_{k \text{ s.t. } \epsilon(k) < 0} d_k^\dagger |0\rangle \quad (16)$$

となる. この状態は**フェルミの海**と呼ばれる.

さて, 次に \mathcal{H}_0 の変種として(14)中の飛び移り積分 t が以下のように空間的に変調しているハミルトニアンを考えよう.

$$\mathcal{H}_{\text{SSD}} = - \sum_{j=1}^L t_j (c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j), \quad (17)$$

$$t_j = t \sin^2(\pi j/L). \quad (18)$$

この系を \mathcal{H}_0 の**サイン二乗変形(SSD)**と呼ぶ¹⁰⁾.

*5) 正確には, 以下では $L = 4n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$) を想定している.

その名の所以はもちろん t_j の関数形からである. また $t_L = 0$ となることから, \mathcal{H}_{SSD} にはサイト L と 1 を繋ぐホッピングが存在しない, つまり開放端をもつことが分かる(図3(b)).

SSDは元々, 一次元系の数値計算において端の効果を軽減するためのスムーズ境界条件として導入されたものであるが, 引原・西野は実は \mathcal{H}_0 と \mathcal{H}_{SSD} の多体の基底状態は数値的にはほぼ等しいことに気づいた¹¹⁾. SSDのような非一様かつ開放端を持つ系の基底状態が, 一様周期系 \mathcal{H}_0 の基底状態と一致することはにわかには信じがたいが, 以下のようにして解析的に示すことができる^{12), 13)}. まず \mathcal{H}_{SSD} を, 半角の公式を用いて次のように三つの項の和で書き直す.

$$\mathcal{H}_{\text{SSD}} = \frac{1}{2} \mathcal{H}_0 - \frac{1}{4} (\mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-) \quad (19)$$

$$\mathcal{H}_\pm = -t \sum_{j=1}^L e^{\pm i\delta j} (c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j) \quad (20)$$

ここで $\delta = 2\pi/L$ である. \mathcal{H}_0 はもちろん波数空間では対角的だが, \mathcal{H}_\pm はそうではない. しかし, 「敢えて」 d_k を用いて \mathcal{H}_\pm を表すと

$$\mathcal{H}_\pm = e^{\mp i\delta/2} \sum_k \epsilon(k \mp \delta/2) d_k^\dagger d_{k \mp \delta} \quad (21)$$

となることに気づく.

このことから, \mathcal{H}_\pm は波数空間で, ある波数 k のフェルミオンを, それぞれ $k \pm \delta$ の波数に移す作用をすることが分かる. ただしその遷移振幅は波数ごとに異なっている. この \mathcal{H}_\pm を(16)で求めた多体の基底状態 $|\text{FS}\rangle$ に作用させてみよう. まずフェルミの海の中では, パウリの排他律のためフェルミオン達は身動きがとれず, \mathcal{H}_\pm は何の遷移も引き起こさない. したがって, \mathcal{H}_\pm が非自明に作用する可能性があるのは, 唯一フェルミ面 ($k = \pm\pi/2$) をまたぐ時だけである. しかし, ここでは $\epsilon(\pm\pi/2) = 0$ であるため, 遷移振幅はゼロになっている(図3(c)). よって, $\mathcal{H}_\pm |\text{FS}\rangle = 0$ であり, (19)から $|\text{FS}\rangle$ は \mathcal{H}_{SSD} の固有状態であることが分かる. さらに, ペロン・フロベニウスの定理を用いると, $|\text{FS}\rangle$ が \mathcal{H}_{SSD} の基底状態であることも示せる⁷⁾.

6. 恒等式 (11) 再び

\mathcal{H}_0 と \mathcal{H}_{SSD} の基底状態の等価性を示すには、 $\mathcal{H}_{\pm}|\text{FS}\rangle = 0$ という関係式が重要であったが、このことを波数空間ではなく実空間で見よう。基底状態 (16) から、実空間での多体の波動関数は、以下のようにスレーター行列式で表される。

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \det[e^{ik_i x_j}]_{i,j=1, \dots, N} \quad (22)$$

ここで x_1, x_2, \dots, x_N はフェルミオンのいるサイトを意味し、 $k_i = \delta(N - 2i + 1)/2$ は $\epsilon(k) < 0$ を満たす波数 k である。 $x_i = x_j$ となる場合は $\Psi = 0$ となり、また x_i と x_j の入れ替えに関して Ψ は反対称であるので、フェルミオンの波動関数としての性質を満たすことが分かる。(22) はさらに、新たな変数 $z_j = \exp(i\delta x_j)$ を導入すると

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \left(\prod_{i=1}^N z_i \right)^{-\frac{N-1}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j) \quad (23)$$

と書けることが分かる。ここでファンデルモンド行列式と差積の関係を使った。

いよいよ、恒等式 (11) との関係に迫ろう。導出は文献 7) に譲るが、実空間での \mathcal{H}_+ の表示 (20) から、 $\mathcal{H}_+|\text{FS}\rangle = 0$ は $\Psi(z_1, \dots, z_N)$ について

$$\sum_{i=1}^N z_i (T_{q, z_i} + q^{-1} T_{q^{-1}, z_i}) \Psi(z_1, \dots, z_N) = 0 \quad (24)$$

が成り立つことを意味する。ただし $q = e^{i\delta}$ 、 T_{q, z_i} は Ψ の引数のうち z_i だけを qz_i に置き換える演算子である。 $\mathcal{H}_-|\text{FS}\rangle = 0$ についても同様の表式が得られる。 T_{q, z_i} の (23) への作用を計算し、(24) の両辺に Ψ^{-1} を掛けると、最終的に以下の恒等式が得られる*6)。

$$\sum_{i=1}^N z_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{z_i - qz_j}{z_i - z_j} = \sum_{i=1}^N z_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq i}} \frac{z_i - q^{-1}z_j}{z_i - z_j} \quad (25)$$

この式で左辺は q に、右辺は q^{-1} にしか依っていないことから、もしこの等式が成り立つならば、

*6) 途中の計算では、 $q^{\pm N/2} = \exp(\pm i\delta N/2) = \pm i$ を用いる。

両辺は q に依存しないと考えられる。したがって、形式的に $q=1$ を代入すれば (11) が得られる。もちろん、ここで N と q, z_1, \dots, z_N は関係付いてしまっているため、これでは証明になっていないのだが、実はこのようにして SSD の性質を調べていた際に副産物として、(11) に気付いたのである。

おわりに

以上紹介した例では、相互作用のない同種粒子系の性質を数学の問題として読み替えることで、非自明な恒等式を得ることができた。最近では、XXZ スピン鎖のような、もっと難しい量子多体系に関連した組み合わせ論の面白い結果も多く得られている¹⁴⁾。また、超対称性のある格子模型も、量子多体系と組み合わせ論の結びつきの宝庫である¹⁵⁾。そこでは、大分配関数ではなくウィッテン指数と呼ばれる母関数が重要な役割を果たす。

後半に紹介した SSD は、元々は多体系の数値計算において技術的な理由で導入されたものであったが、自由フェルミオンの場合には基底状態が厳密に求まり、(11) のような総和則との不思議な出会いがあった。この手の総和則は、マクドナルド多項式¹⁶⁾ の理論ではお馴染みのものである。(11) とは別の総和則から、SSD とは異なる変形を構成できないか。あるいは、逆に他の量子系から、今まで誰も見つけたことのないような恒等式を発見できないか... とついつい夢想してしまう。

参考文献

- 1) 野海正俊：『オイラーに学ぶ』、日本評論社 (2007)。
- 2) 山田裕史：『組み合わせ論プロムナード』、日本評論社 (2009)。
- 3) 標準的な教科書として、田崎晴明：『統計力学 I, II』、培風館 (2008)。
- 4) M. Stone ed., *Bosonization*, World Scientific (1994)。
- 5) 川上則雄、梁成吉：『共形場理論と 1 次元量子系』、岩波書店 (1997)。
- 6) F. D. M. Haldane: *J. Phys. C* **14**, 2585-2609 (1981)。
- 7) H. Katsura: *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 252001 (2011)。
- 8) 堀田良之、渡辺敬一、庄司俊明、三町勝久：『代数学

- 百科-群論の進化』, 朝倉書店 (2004) 第4章.
- 9) 標準的な具体例は, 永長直人:『物性論における場の量子論』, 岩波書店 (1995) の3・4章に見いだせる.
 - 10) SSDの導入や研究の経緯に関する解説として, 引原俊哉, 桂法称, 丸山勲, 西野友年: 日本物理学会誌 **67**, 394-398 (2012).
 - 11) T. Hikihara and T. Nishino: *Phys. Rev. B* **83**, 060414 (2011).
 - 12) I. Maruyama, H. Katsura, and T. Hikihara: *Phys. Rev. B* **84**, 165132 (2011).
 - 13) H. Katsura: *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 115003 (2012).
 - 14) 岡田聡一: 数理科学 2008年12月号 33-39.
 - 15) P. Fendley, K. Schoutens, and J. de Boer, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 120402 (2003).
 - 16) 白石潤一:『量子可積分系入門』SGC ライブラリ vol.**28**, サイエンス社 (2003).

(かつら・ほうしょう, 学習院大学)