

# 量子測定と相転移・臨界現象

蘆田 祐人 (東京大学 大学院理学系研究科)

## 概要

量子測定と聞くと「たびたび論争になっていて、なんだか近寄りたいたいけど面白いの?」「物性で扱うような大自由度系で、測定の影響が重要になる状況って本当にあるの?」と思われる方が多いかもしれません。本講義ではこれらの疑問に答えるべく、量子測定により引き起こされる豊かな量子多体現象の一端を紹介できればと考えています。具体的には、現代的な量子測定理論を説明した後、一次元系の相転移・臨界現象を扱い、測定誘起相転移・臨界現象に関する最先端の研究を紹介します。

## 1 量子測定と量子多体物理

量子系を測定すると、観測者が情報を獲得することの代償として、量子状態が不可逆的に変化する。このような測定に伴う影響を「測定の反作用」あるいは「波動関数の収縮」と呼ぶ。測定の影響は、原子や光子などのミクロな自由度の振る舞いを精緻に記述・理解する上で不可欠なため、量子測定の研究は主として量子光学の分野で進展してきた。

一方で、物性物理はマクロな大自由度量子系 (量子多体系) を扱う分野である。量子多体系も量子系である以上、測定の反作用は避けられないはずだが、固体物質の研究では量子測定の影響を無視するのが常である。しかし近年、実験技術の発展により単一量子レベルでの精密測定が、量子多体系においても可能となった。例えば冷却原子気体や超伝導回路などで、量子多体ダイナミクスを単一量子レベルでミクロに測定・制御することが実現している。ミクロな運動の詳細は観測・制御できないという仮定のもとに成立してきた従来の量子多体系の枠組みは、このような状況では破綻し、異なる一般原理に基づいた理論が必要となる。

本講義では、量子測定によって引き起こされる量子多体現象について紹介する。特に、量子多体系の顕著な性質として相転移・臨界現象に焦点を当て、その典型例である一次元系を扱う。量子測定理論と一次元臨界現象の概観を紹介した後、最近盛んに研究されている測定誘起相転移について議論する。なるべく予備知識が要らない説明を試みるが、紙面の都合上カバーしきれない事項については末尾の文献を参照されたい [1, 2]。扱う内容は現在進行中で研究が進んでいるものも多く含むため、この講義を受けた方の中からもし良いアイデアが出てくれば望外の喜びである。

## 2 量子測定理論

### 2.1 間接測定模型

着目系 ( $S$ ) と測定器 ( $A$ ) を相互作用させ、測定器に射影測定を行う間接測定模型を考える。初期状態として積状態を準備する:

$$\hat{\rho}_{\text{ini}} = \hat{\rho}_S \otimes |0\rangle_{AA}\langle 0|. \quad (2.1)$$

$\hat{\rho}_S$  は着目系の初期状態を表す密度行列で、測定器の初期状態は純粋状態  $|0\rangle_A$  とする。着目系と測定器を含めた全体系の時間発展はユニタリである:

$$\hat{\rho}_{\text{tot}} = \hat{U} \hat{\rho}_{\text{ini}} \hat{U}^\dagger. \quad (2.2)$$

ユニタリ発展後に測定器に射影測定を行う。この過程は

$$\mathcal{E}_m(\hat{\rho}_S) \equiv \text{Tr}_A \left[ \left( \hat{I}_S \otimes \hat{P}_m \right) \hat{\rho}_{\text{tot}} \left( \hat{I}_S \otimes \hat{P}_m \right) \right] \quad (2.3)$$

と記述される (Steinspring 表現)。ここで  $\text{Tr}_A$  は測定器の自由度に関するトレース、 $\hat{I}_S$  は着目系に作用する恒等演算子であり、 $\hat{P}_m$  は測定結果  $m$  に対応する射影演算子で次を満たす：

$$\hat{P}_m^2 = \hat{P}_m, \quad \hat{I}_A = \sum_m \hat{P}_m. \quad (2.4)$$

$\hat{I}_A$  は測定器上の恒等演算子である。一連の操作を表す写像  $\mathcal{E}_m$  は、着目系の初期状態  $\hat{\rho}_S$  に作用する点に注意しよう。測定結果  $m$  を得る確率  $p_m$  は、被測定系の自由度についてもトレースをとることで

$$p_m = \text{Tr}_S [\mathcal{E}_m(\hat{\rho}_S)] \quad (2.5)$$

で与えられ、測定後の状態は  $p_m$  で規格化した

$$\hat{\rho}_{S,m} = \frac{\mathcal{E}_m(\hat{\rho}_S)}{p_m} \quad (2.6)$$

として得られる。

さて、測定過程を特徴付ける写像  $\mathcal{E}_m$  を、測定器の自由度が陽に現れない形で表そう。そのために次の Kraus 演算子を導入する：

$$\hat{M}_m = \langle m | \hat{U} | 0 \rangle. \quad (2.7)$$

ここで  $\hat{U}$  は着目系と測定器の全体に作用するため、 $\hat{M}_m$  は着目系上の演算子であることに注意しよう。これを用いると、測定過程  $\mathcal{E}_m$  は着目系のヒルベルト空間上で

$$\mathcal{E}_m(\hat{\rho}_S) = \hat{M}_m \hat{\rho}_S \hat{M}_m^\dagger \quad (2.8)$$

と表せる (Kraus 表現)。測定結果  $m$  を得る確率は

$$p_m = \text{Tr}_S \left[ \hat{\rho}_S \hat{E}_m \right], \quad \hat{E}_m = \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \quad (2.9)$$

と書ける。ここで  $\hat{E}_m$  は Positive Operator-Valued Measure (POVM) と呼ばれる。POVM の和は次の完全性条件を満たす：

$$\sum_m \hat{E}_m = \sum_m \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m = \hat{I}_S. \quad (2.10)$$

これは確率の規格化条件  $\sum_m p_m = 1$  に対応する。

このように写像  $\mathcal{E}_m$  は測定結果に条件づけられた状態変化を記述する。一方で、測定結果で条件づけられない (つまり測定結果についてアンサンブル平均を行った) 場合の状態変化は

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}_S) \equiv \sum_m \mathcal{E}_m(\hat{\rho}_S) = \text{Tr}_A \left[ \hat{U} \hat{\rho}_{\text{ini}} \hat{U}^\dagger \right] = \sum_m \hat{M}_m \hat{\rho}_S \hat{M}_m^\dagger \quad (2.11)$$

と書き下せ、写像  $\mathcal{E}$  で表す。 $\mathcal{E}$  はトレースを保存し、完全正値性<sup>\*1</sup>を満たす写像 (CPTP 写像<sup>\*2</sup>) として特徴付けられる。完全正値性は、物理的に実現可能な写像が満たすべき基本的な条件である。例えばもしこの性質が満たされていないと、測定器ともつれた初期状態に  $\mathcal{E}$  を作用させることで「負の確率」を持つ非物理的な状態が生じ得る [3]。逆に、任意の CPTP 写像は何らかの間接測定模型で実現できることが知られている。つまり大ざっぱには「物理的に可能な全ての測定過程は、式 (2.3) あるいは (2.8) の形で表現できる」と考えて差し支えない。

<sup>\*1</sup> ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の線形演算子の集合を  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  と表す。写像  $\mathcal{E} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  が完全正値であるとは、任意のヒルベルト空間  $\mathcal{H}_A$  について  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$  上の恒等演算子  $\mathcal{I}$  を用いた線形写像  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{I} : \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A)$  が正値であることを指す。

<sup>\*2</sup> Completely positive and trace preserving の略。

## 2.2 量子連続測定（速習）

弱い間接測定を繰り返すことで、測定を断続的に行う「連続測定過程」を考える。導出は省略するが、上で導入した間接測定模型で適切な極限をとると、連続測定過程の Kraus 演算子は何らかの演算子の集合  $\{\hat{L}_m | m \in \mathbb{N}\}$  を用いて

$$\hat{M}_m = \hat{L}_m \sqrt{dt} \quad (2.12)$$

$$\hat{M}_0 = 1 - i\hat{H}_{\text{eff}}dt \quad (2.13)$$

と一般に表せる<sup>\*3</sup>[4]。ここで  $dt$  は微小な時間間隔を表し、非エルミート「ハミルトニアン」を

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H} - \frac{i}{2} \sum_{m \geq 1} \hat{L}_m^\dagger \hat{L}_m \quad (2.14)$$

により導入した。微小時間  $dt$  の間に測定結果  $m \geq 1$  を観測した場合には  $\hat{M}_m$  が、それ以外の場合には  $\hat{M}_0$  が量子状態に作用する。以降慣習に従い前者の過程を量子ジャンプ、後者をノージャンプあるいはノークリック過程と呼ぶ。

初期状態が純粋状態であれば、測定結果に条件づけた時間発展において量子状態は純粋状態であり続ける。この時の確率的な状態変化は、確率微分方程式により

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle + d|\psi\rangle = \left(1 - \sum_{m \geq 1} dN_m\right) \frac{\hat{M}_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \hat{M}_0^\dagger \hat{M}_0 \rangle}} + \sum_{m \geq 1} dN_m \frac{\hat{M}_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \rangle}} \quad (2.15)$$

と表せる。ここで  $dN_m$  は  $\{0, 1\}$  の二値をとり得る離散変数確率過程で次を満たす：

$$dN_m dN_n = \delta_{mn} dN_m \quad (2.16)$$

$$\mathbb{E}[dN_m] = \langle \hat{M}_m^\dagger \hat{M}_m \rangle = \langle \hat{L}_m^\dagger \hat{L}_m \rangle dt. \quad (2.17)$$

全ての  $m$  について  $dN_m = 0$  である場合がノージャンプ過程に対応し、 $dN_m = 1$  は量子ジャンプ  $m$  が生じたことを意味する。式 (2.16) は「微小時間  $dt$  の間に生じる量子ジャンプは高々一回」であることを意味する<sup>\*4</sup>。式 (2.17) の  $\mathbb{E}[\dots]$  は確率過程のアンサンブル平均を表し、 $dN_m$  の期待値が「微小時間  $dt$  の間に量子ジャンプ  $m$  が起こる確率」に対応することを意味している（式 (2.9) を参照）。式 (2.15) のそれぞれの項の分母は波動関数の規格化に必要な因子である。

状態の変化分  $d|\psi\rangle$  を演算子  $\hat{L}_m$  を用いた形に書き直せば

$$d|\psi\rangle = \left(-i\hat{H}_{\text{eff}} + \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} \langle \hat{L}_m^\dagger \hat{L}_m \rangle\right) dt|\psi\rangle + \sum_{m \geq 1} \left(\frac{\hat{L}_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle \hat{L}_m^\dagger \hat{L}_m \rangle}} - |\psi\rangle\right) dN_m \quad (2.18)$$

となる。右辺第一項は  $\hat{H}_{\text{eff}}$  で生成される決定論的かつ連続なノージャンプ過程である<sup>\*5</sup>。第二項は量子ジャンプ  $m$  に対応した、確率的かつ不連続な状態変化を表す。慣習に従い  $\hat{L}_m$  をジャンプ演算子と呼び、確率的な時間発展の実現それぞれを量子トラジェクトリーと呼ぶ。例えば、時間  $[0, t]$  の間に  $n$  回量子ジャンプが生じた場合のトラジェクトリーは

$$|\psi_{\text{traj}}(t)\rangle = \prod_{k=1}^n \left[ \hat{U}_{\text{eff}}(\Delta t_k) \hat{L}_{m_k} \right] \hat{U}_{\text{eff}}(t_1) |\psi(0)\rangle / \|\cdot\| \quad (2.19)$$

<sup>\*3</sup>  $\hbar = 1$  とする。

<sup>\*4</sup> 確率過程  $dN_m$  は一見 Poisson 過程に似ているが、その期待値が状態ベクトルに依存しているため別物である。 $dN_m$  は数学的には marked point process として知られている。

<sup>\*5</sup>  $\sum_{m \geq 1} \langle \hat{L}_m^\dagger \hat{L}_m \rangle / 2$  は規格化に必要な項である。

と書ける。ここで  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$  は量子ジャンプ  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  が生じた時刻、 $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$  は時間差で、 $t_{n+1} \equiv t$  および  $\hat{U}_{\text{eff}}(t) = e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t}$  と表した。特に、ノージャンプ過程 ( $n = 0$ ) は決定論的な非エルミート発展に対応する：

$$|\psi_{\text{NH}}(t)\rangle = \hat{U}_{\text{eff}}(t)|\psi(0)\rangle / \|\cdot\|. \quad (2.20)$$

連続測定下の発展方程式 (2.18) を、密度行列  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  に対する形に書き直し、アンサンブル平均をとると

$$\frac{d\mathbb{E}[\hat{\rho}]}{dt} = -i\left(\hat{H}_{\text{eff}}\mathbb{E}[\hat{\rho}] - \mathbb{E}[\hat{\rho}]\hat{H}_{\text{eff}}^\dagger\right) + \sum_{m=1}^M \hat{L}_m\mathbb{E}[\hat{\rho}]\hat{L}_m^\dagger \quad (2.21)$$

という微分方程式を得る。これは Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad マスター方程式として知られ、全てのあらゆる測定結果についてアンサンブル平均をとった密度行列の時間発展を記述する。密度行列に関して線形な量（例えば観測量の期待値  $\text{Tr}[\hat{\rho}\hat{O}]$ ）を考える限りは、量子トラジェクトリー (2.19) でアンサンブル平均をとった結果と、マスター方程式 (2.21) の結果は一致する。しかし、密度行列に関して非線形な量を考えると、後で紹介するように両者は全く異なる振る舞いを示し得る。例えば、量子トラジェクトリーのエンタングルメントエントロピーが示す測定誘起転移は、マスター方程式の解析では検出できない。

### 3 一次元量子臨界現象

#### 3.1 朝永-Luttinger 液体（速習）

一次元空間上の量子多体系を考える。基底状態がギャップレスな臨界状態の場合、ミクロな模型の詳細に依らない普遍的な振る舞いがマクロスケールで発現する。例えば、相関関数は距離に対して指数的ではなくべき的に減衰し、その指数により普遍性のクラスが分類される。ここでは、一次元量子系の普遍性クラスの代表例である朝永-Luttinger 液体を扱う。

話を具体的にするため、一次元格子上的 XXZ 模型を考えよう：

$$\hat{H}_{\text{XXZ}} = J \sum_j (\hat{\sigma}_j^x \hat{\sigma}_{j+1}^x + \hat{\sigma}_j^y \hat{\sigma}_{j+1}^y + \Delta \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_{j+1}^z), \quad J > 0. \quad (3.1)$$

$\{\hat{\sigma}_j^\alpha | \alpha \in \{x, y, z\}, j \in \mathbb{Z}\}$  は格子サイト  $j$  上の Pauli 演算子で、周期的境界条件を仮定する。 $|\Delta| < 1$  の場合、基底状態は臨界性を示し、その低エネルギー有効理論は次の朝永-Luttinger 液体で与えられる：

$$\hat{H} = \frac{v}{2\pi} \int dx \left[ K (\partial_x \hat{\theta})^2 + \frac{1}{K} (\partial_x \hat{\phi})^2 \right]. \quad (3.2)$$

$v$  はギャップレスな素励起の線形分散を特徴付ける速度パラメータで、 $\hat{\theta}(x), \hat{\phi}(x)$  は  $[\partial_x \hat{\theta}(x), \hat{\phi}(x')] = i\pi\delta(x-x')$  を満たすボソン場演算子である。実数  $K$  は臨界指数を特徴付けるパラメータで、XXZ 模型の場合は Bethe 仮設により次の表式が知られている：

$$K = \frac{\pi}{2(\pi - \cos^{-1} \Delta)}. \quad (3.3)$$

異なる  $K$  に対応する朝永-Luttinger 液体それぞれが、異なる普遍性クラスを定義する。例えば、XXZ 模型の基底状態の相関関数は

$$\langle \hat{\sigma}_0^x \hat{\sigma}_l^x \rangle \propto \frac{(-1)^l}{l^{\frac{1}{2K}}} \quad (3.4)$$

のように、臨界指数  $\frac{1}{2K}$  でべき的に減衰する。ボソン化を用いると、一般にスピン演算子は

$$\hat{\sigma}_j^z = \frac{2a}{\pi} \partial_x \hat{\phi} + c_1 (-1)^j \cos(2\hat{\phi}) \quad (3.5)$$

$$\hat{\sigma}_j^\pm = e^{-i\hat{\theta}} \left[ c_2 (-1)^j + c_3 \cos(2\hat{\phi}) \right] \quad (3.6)$$

によりボソン場と関係づく [2]。ここで  $a$  はスピン鎖の格子定数、 $\hat{\sigma}_j^\pm = (\hat{\sigma}_j^x \pm i\hat{\sigma}_j^y)/2$  で、 $c_{1,2,3}$  は模型の詳細に依存する係数である。

スピン  $\frac{1}{2}$  鎖はハードコアボソン模型と等価である。以降の議論は、ハードコアボソンの言葉を用いる方が直感的に理解しやすいかもしれない。具体的には次の対応関係がある：

$$\hat{\sigma}_j^+ = \hat{b}_j^\dagger, \quad \hat{\sigma}_j^- = \hat{b}_j, \quad \hat{\sigma}_j^z = \hat{n}_j - \frac{1}{2}. \quad (3.7)$$

ここで  $\hat{b}_j, \hat{b}_j^\dagger$  は格子サイト  $j$  でのハードコアボソンの消滅・生成演算子で、粒子数演算子  $\hat{n}_j = \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$  は二値の固有値  $n_j \in \{0, 1\}$  を持つ。同一の格子サイトを複数のボソンが占有できないというハードコア条件は

$$\left(\hat{b}_j^\dagger\right)^2 = 0 \iff [\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = (1 - \hat{n}_i) \delta_{ij} \quad (3.8)$$

と表される。ハードコアボソンの言葉で式 (3.5) を解釈すれば、朝永-Luttinger 液体に現れる場の演算子  $\hat{\phi}(x)$  は「粒子の密度揺らぎ」を表し、それと共役な  $\hat{\theta}(x)$  は「位相揺らぎ」を表すと解釈できる。XXZ 模型をハードコアボソンの模型として書き直すと

$$\hat{H}_{\text{XXZ}} = 2J \sum_j \left( \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j+1} + \hat{b}_{j+1}^\dagger \hat{b}_j + \frac{\Delta}{2} \hat{n}_j \hat{n}_{j+1} \right) \quad (3.9)$$

を得る\*6。始めの二つの項はボソンの生成消滅演算子について二次の運動エネルギー項で、三つ目の項が二次形式で書けない相互作用項である。つまりミクロな格子模型の段階では相互作用のあるボソンの多体問題であるが、その低エネルギー有効理論を考えると、式 (3.2) のように相互作用がない（つまり二次形式の）自由ボソン場の理論に帰着される。このような単純化は今回の模型の特殊な性質ではなく、ボソン化を用いることで（フェルミ粒子系などを含む）広いクラスの一次元多体系で一般に行える。

## 3.2 エンタングルメントエントロピー

量子測定が多体系に及ぼす影響を調べる上で、多体系のエンタングルメント構造を理解することが重要となる。そのための指標を簡単に紹介する。一次元量子多体系の純粋状態  $|\psi\rangle$  を考え、長さ  $l$  の部分領域  $A$  上の縮約密度行列を

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_{\bar{A}} [|\psi\rangle\langle\psi|] \quad (3.10)$$

で導入する。 $|\psi\rangle$  において領域  $A$  とそれ以外の領域  $\bar{A}$  との間に生じるエンタングルメントは、 $\hat{\rho}_A$  の Rényi エントロピーで評価できる：

$$S_A^{(n)} = \frac{1}{1-n} \log \text{tr} [\hat{\rho}_A^n]. \quad (3.11)$$

もし  $A$  と  $\bar{A}$  の間にエンタングルメントが存在しなければ、 $\hat{\rho}_A$  は純粋状態であり  $S_A^{(n)} = 0$  となる。

$S_A^{(n)}$  は  $n \rightarrow 1$  とした場合、von Neumann エントロピーに帰着する：

$$S_A = -\text{Tr}_A [\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A]. \quad (3.12)$$

この量を単にエンタングルメントエントロピーと呼ぶことにする。これらの量が密度行列に対して非線形な量であることに注意しよう。この非線形性故に、 $S_A$  を量子トラジェクトリー (2.19) で平均して得られる結果と、マスター方程式 (2.21) から従う結果は一般に異なる。

量子状態  $|\psi\rangle$  の振る舞いを反映して、 $S_A$  は部分領域の長さ  $l$  に対して異なるスケーリング則を示す。例えば以下のような対応関係が知られている：

\*6 基底状態がハーフフィリングのセクター  $\sum_j \hat{\sigma}_j^z = \sum_j (\hat{n}_j - \frac{1}{2}) = 0$  に存在することを用い、定数項を無視した。

体積則 ( $S_A \propto l$ ): (基底状態から十分離れた) 励起状態、熱的状态、典型的な状態...

対数則 ( $S_A \propto \ln l$ ): 共形場理論の基底状態 (臨界状態)...

面積則 ( $S_A \propto \text{const.}$ ): 励起ギャップを持つ基底状態、局在状態、行列積状態...

大ざっぱに言ってしまうと、面積則を示す場合は粒子が簡単に励起できず「おとなしく」している状態である。逆に体積則を示すのは、エネルギーが十分に注入され、沢山の粒子が「自分勝手に動き回っている」状態である。これらの間である対数則は、粒子が動き回ろうとほぼしかかっているのだけど、ギリギリしていない臨界状態に対応する。

## 4 測定誘起相転移・臨界現象

量子測定で引き起こされる相転移・臨界現象について紹介する。測定誘起現象の研究は、これまで主に二つの異なる問題設定で進んできている。一つ目は、時間が離散的な場合で、量子回路の文脈で興味が持たれている [5]。数値シミュレーションを用いた研究が中心であるが、いくつかの特別な場合には既知の統計力学模型に対応づけることで解析的な結果も得られている。

二つ目は、時間が連続的な場合である。上でも学んだ量子連続測定に基づく数値シミュレーションを用いた研究が中心である。自由粒子の場合には、場の理論を用いた解析的な結果もいくつか議論されはじめている。ここでは主に連続時間の研究に焦点を当て、これまで学んだことをベースにいくつかの話題を紹介する。

### 4.1 ノージャンプ (ノークリック) 過程

#### 測定のみ

なるべく単純な問題から議論を始めよう。連続測定下で、量子ジャンプが生じないノージャンプ (ノークリック) 過程を考える。初期状態はハードコアボソン模型 (3.9) で実現する朝永-Luttinger 液体の基底状態とし、これに密度測定を行う。簡単のため、測定の最中はユニタリダイナミクスが凍結されているとする\*7。それぞれの格子サイト  $j$  での測定強度を  $\gamma_j$  とすれば、対応するジャンプ演算子は  $\hat{L}_j = \sqrt{\gamma_j} \hat{n}_j$  となる。このうち  $\gamma_j \propto (-1)^j \gamma$  という成分が、低エネルギーの振る舞いに最も影響を及ぼ

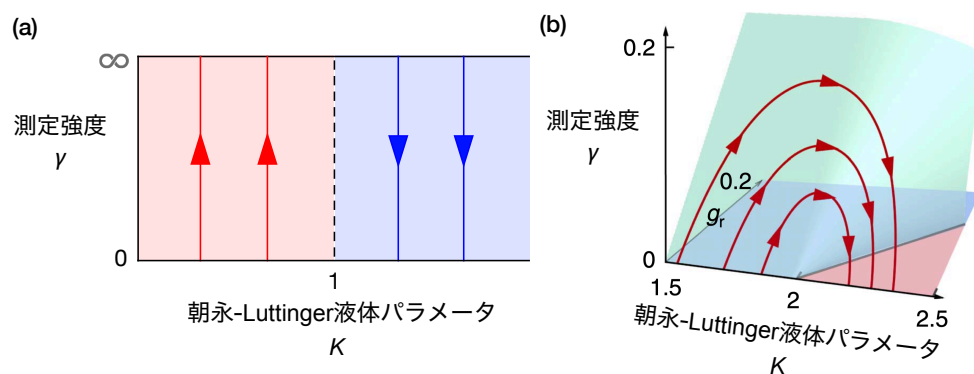


図1 連続密度測定下の朝永-Luttinger 液体における、ノークリック過程のくりこみ群フロー。(a) 測定のみの場合 [6] と、(b) 測定とユニタリダイナミクスを含む場合 [10]。いずれも摂動的くりこみ群で得られた結果。

\*7 実験的には、例えば冷却原子気体で光格子ポテンシャルを一時的に十分高くすることで実現できる。

す。従って、非エルミートハミルトニアンの有効模型として

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -\frac{i}{2} \sum_j \gamma_j \hat{n}_j \propto -i\gamma \int dx \cos(2\hat{\phi}) \quad (4.1)$$

が得られる。ここで  $\hat{n}_j^2 = \hat{n}_j$  と式 (3.5) を用いた。この結果より、測定後の状態は

$$|\psi_{\text{NH}}(t)\rangle \propto e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t} |\psi(0)\rangle \sim e^{-\gamma t \int dx \cos(2\hat{\phi})} |\psi(0)\rangle \quad (4.2)$$

となる [6]。つまり、測定の効果は虚時間発展として書き下せる。式 (4.2) を虚時間経路積分法により  $(1+1)$  次元の場の理論として記述すれば、測定の効果は境界上に作用する項として扱える。この場の理論をくりこみ群で解析すると、測定強度  $\gamma$  に関するフロー方程式が

$$\frac{d\gamma}{dl} = (1-K)\gamma \quad (4.3)$$

と求まる [7, 8]。ここで  $l$  は対数くりこみ群スケールで、 $x \sim ae^l$  の長さスケールでの振る舞いに対応する。つまり測定が長距離の振る舞いに影響を及ぼすか否かは、パラメータ  $K$  の値で決まっており、 $K < 1$  では測定がくりこみ群の意味で有意 (relevant)、 $K > 1$  では非有意 (irrelevant) と結論される (図 1(a))。

### 測定とユニタリダイナミクス

次に被測定系内部のユニタリダイナミクスも含めてみよう。話を具体的にするため (ハードコアではない) 次元ボース気体に、一様な強度の密度測定 ( $\hat{L}_j = \sqrt{\gamma} \hat{n}_j$ ) を行う場合を考える。非エルミートハミルトニアンの有効模型は

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_{\text{Bose}} - \frac{i\gamma}{2} \sum_j \hat{n}_j^2 \simeq \frac{v}{2\pi} \int dx \left[ K (\partial_x \hat{\theta})^2 + \frac{1-i\delta_\gamma}{K} (\partial_x \hat{\phi})^2 \right] \quad (4.4)$$

となる。ここで  $\hat{H}_{\text{Bose}}$  は次元ボース気体のハミルトニアン、実数  $\delta_\gamma \geq 0$  は測定強度  $\gamma$  で決まる係数である。最右辺の有効模型は二次形式であるため厳密に解くことができる。初期状態がガウス状態であれば、測定後の状態  $|\psi_{\text{NH}}(t)\rangle \propto e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t} |\psi(0)\rangle$  もガウス状態にとどまるため、種々の物理量が厳密に計算できる。特に、相関関数はべき減衰し、測定下でも臨界性は保たれる。しかし、臨界指数が測定強度  $\gamma$  に依存して変化するため、通常の朝永-Luttinger 液体とは異なる普遍性クラスが実現する [9]。

測定強度に空間変調 ( $\hat{L}_j = \sqrt{\gamma_j} \hat{n}_j$ ) を加えると、上でも現れた  $\cos(2\hat{\phi})$  というポテンシャル項が摂動として一般に生じ、有効模型は非エルミート sine-Gordon 模型で与えられる。この場合、測定強度を大きくすると相転移が起こり、エルミート系に類のない特異なくくりこみ群フローが現れる [10] (図 1(b))。

## 4.2 量子トラジェクトリー

量子測定が確かに量子多体系に非自明な影響を与えることが、ノックリック過程の解析でわかった。次の自然なステップは、典型的な量子トラジェクトリーにおいてどのような影響が生じるかを調べることだろう。この場合は解析的な取り扱いが容易でなくなるため、数値シミュレーションを用いた研究が中心に行われている。

話を具体的にするため、再び連続的な密度測定下の次元ハードコアボソン模型<sup>\*8</sup>を扱う。測定強度を一様とすれば、ジャンプ演算子は  $\hat{L}_j = \sqrt{\gamma} \hat{n}_j$  となる。対応する非エルミートハミルトニアンは  $\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H} - \frac{i\gamma}{2} \sum_i \hat{n}_i = \hat{H} - \frac{i\gamma N}{2}$  である。ここで総粒子数  $N$  は保存量であり、波動関数の規格化を行えば、ノックリック過程は  $\hat{H}$  で生成されるユニタリダイナミクスと等価となる。つまり、この場合量子測定の影響は量子ジャンプのみとなる。

<sup>\*8</sup> 模型の特殊性 (可積分性) を失くすため、式 (3.9) に次近接相互作用項を加えた模型をここでは考える。

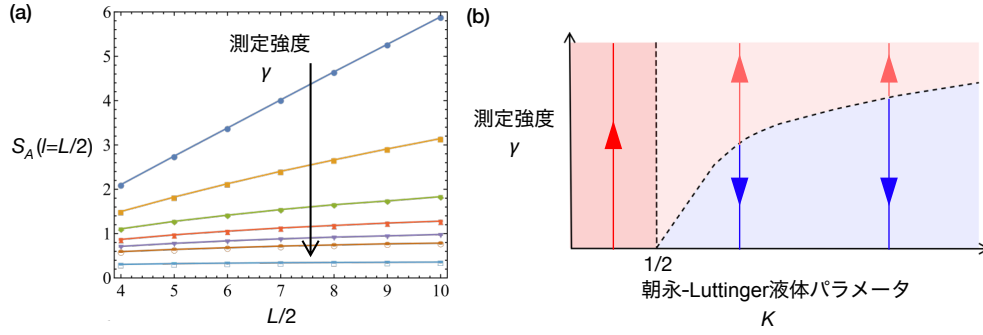


図2 (a) 測定によるエンタングルメントエントロピーのスケーリング則の変化。連続密度測定下の一次元多体系の数値シミュレーションを行い、量子トラジェクトリーで平均して得た結果 [12]。 (b) 系-測定器エンタングルメントの相転移とくりこみ群フロー。密度測定下の朝永-Luttinger 液体を汎関数くりこみ群と境界共形場理論により解析して得た結果 [26]。

エンタングルメントの性質を調べるため、長さ  $l$  の部分領域  $A$  に関するエンタングルメントエントロピーを考える。特に、トラジェクトリーの典型的性質に興味があるため、測定結果についてアンサンブル平均した量に着目する：

$$S_A = -\mathbb{E} [\text{Tr}_A [\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A]] . \quad (4.5)$$

以下で説明するように、 $S_A$  は測定強度に応じて異なるスケーリング則を示す。これはエンタングルメントを生成するユニタリダイナミクスと、エンタングルメントを壊す量子測定とが競合した結果生じる相転移・臨界現象として解釈できる。

まず測定が十分弱い領域を考える。この場合、量子ジャンプの典型的な待ち時間は多体系が熱緩和に要する時間スケールよりも十分長く、量子ジャンプ間で被測定系が熱化していることが数値シミュレーションで確かめられている [11]。量子ジャンプの役割は、波束の収縮によりエネルギーを系に注入し、実効的に温度を上昇させることである。十分時間が経てば、量子状態は基底状態から遠く離れた励起状態になる。上で説明した通り、このときエンタングルメントエントロピーは体積則を示す。

次に、測定が強い極限を考える。この場合、量子ジャンプが非常に高い頻度で生じるため、粒子は異なる格子サイトにホップする暇なく測定の反作用により局在する。従って、エンタングルメントエントロピーは面積則を示す。

上で述べた二つの極限の間には臨界点が存在し、臨界点直上ではエンタングルメントエントロピーが対数則を示す（測定誘起臨界性）。測定強度を変化させると、この臨界点  $\gamma_c$  を境に、エンタングルメントのスケーリング則が質的に変化する（測定誘起相転移）。まとめると

$$S_A \propto \begin{cases} l & 0 < \gamma < \gamma_c \\ \ln l & \gamma = \gamma_c \\ \text{const.} & \gamma > \gamma_c \end{cases} \quad (4.6)$$

となる [12] (図 2(a))。以上の結果は模型のパラメータの詳細に依らず数値的に確認されており、相互作用のある一次元量子多体系で普遍的に生じる現象と期待される。定性的に同様の結果は、ランダムなユニタリ演算と確率的な射影測定を行う量子回路においても得られている [5]。

### 自由粒子の場合に関する注意

相互作用がない量子系の場合は、事情が少し特殊で注意が必要である。話を具体的にするため、ハードコアボソン模型 (3.9) で相互作用項がない場合 ( $\Delta = 0$ ) に、一様な密度測定  $\hat{L}_j = \sqrt{\gamma} \hat{n}_j$  を行うことを考えよう。この場合、測定を行っても体積則が生じないことが、数値的・解析的な研究の両面から示唆されている。一方で、測定誘起相転移が生じるか否かについては、現状ちょっとした論争になっており完全な解決には至っていない。



具体的には

- (i) 任意の測定強度  $\gamma > 0$  で面積則を示す。
- (ii) 閾値  $\gamma_c$  が存在し、 $0 < \gamma < \gamma_c$  では対数則を、 $\gamma > \gamma_c$  では面積則を示す。

という二説が議論されている。数値的には (i) を示唆する結果 [13, 14] と、(ii) を支持する結果 [15, 16] の両方が得られている。説 (ii) を支持する解析的な議論としては、非エルミート sine-Gordon 模型を用いた場の理論が提案されている [17]。しかし、対数則の係数の値（有効中心電荷）が数値結果と整合しないなど、その有効性には議論の余地がある。

説 (i) を支持する解析的な結果として、ノージャンプ過程に量子ジャンプを現象論的に取り入れた理論 [18] や、非線形シグマ模型を用いた場の理論 [19] が提案されている。特に後者は、対数則と面積則を見極めるには指数的に大きいサイズが必要であることを議論し、文献 [15, 16] で得られた結果がこの有限サイズ効果に由来している可能性を指摘している。しかし、これらの解析では量子ジャンプが独立に一様かつ一定の頻度で生じるという単純化がなされている。実際の量子トラジェクトリーでは、量子ジャンプの頻度は状態に依存し相関を持つため、これらの理論で文献 [15, 16] の数値結果が完全に理解できているか否かについては議論の余地がある。

### 事後選択の困難

測定誘起現象を実験で観測するのは一般に容易でない。エンタングルメントエントロピーなど密度行列について非線形な量を測定するには、同じ状態を複数個（あるいは複数回）用意する必要がある。エンタングルメントエントロピーの測定自体は、例えば冷却原子気体の実験 [20] などで実現しているが、測定誘起現象でネックとなるのは「同じ状態を複数用意」しなければならない点である。量子トラジェクトリーは測定結果に条件づけた時間発展であり、同じ状態を準備するには全く同じ測定結果が実現したトラジェクトリーを事後選択する必要がある。しかし、そのような事後選択の成功確率は量子系のサイズに対して指数的に減少してしまう。

この問題も自由粒子のケースと同様に、今なお進行中の課題で完全な解決には至っていないが、いくつかの試みがなされているため簡単に紹介する。まずサイズが小さい系であれば「力づく」で事後選択を原理的には行える。実際、14 量子ビットの超伝導回路を用いた実験で測定誘起転移を観測したという報告 [21] がある。Clifford 量子回路の場合は、参照キュービットともつれた初期状態を準備し、時間発展後の状態における参照キュービットの von Neumann エントロピーを秩序変数として用いることが提案され [22]、トラップイオンの実験で実装されている [23]。ユニタリ回路と測定下の非ユニタリ回路の間に双対性がある場合は、事後選択の困難が部分的に改善できる [24]。最近では量子系の実験で得られた測定結果と、古典計算機でのシミュレーション結果の間の相互相関を解析することで、測定誘起現象の兆候を捉えることも提案されている [25]。

別の方向性として、そもそも事後選択を必要としない密度行列を考え、その非線形な量が示す相転移・臨界現象も議論されている [26]。具体的には、式 (2.11) の「測定結果でアンサンブル平均した密度行列  $\mathcal{E}(\hat{\rho}_S)$ 」について非線形な量を考え、それが測定強度の関数として特異性を示すことが場の理論の解析でわかっている (図 2(b))。Steinspring 表現を思い出せば、 $\mathcal{E}(\hat{\rho}_S)$  について非線形な量は着目系  $S$  と測定器  $A$  の間のエンタングルメントの指標に他ならない。つまり、この特異性は系-測定器エンタングルメントにおける「測定誘起転移」と物理的には解釈される。

### おわりに

この講義では臨界現象に焦点を当ててきましたが、測定下の量子多体系は、他にもトポロジカル現象などの観点からも興味を持たれています [4, 27, 28]。測定に誘起される多体系の研究は、まだ始まったばかりでまさに現在進行形で進展しているところです。特に、連続測定下で相互作用のある多体系を記述する基礎理論はほとんど未開拓と言って良い状況です。私自身も考え続けている問題ですが、この

講義を受講した皆さんの中から良いアイデアが出てくれば望外の喜びです。最後に、2024年の物性若手夏の学校の運営に携わった皆様に感謝します。

## 参考文献

- [1] 量子測定や開放系の参考書として例えば、H. M. Wiseman and G. J. Milburn, *Quantum Measurement and Control* (Cambridge University Press, 2019) や、H-P. Breuer, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, 2007).
- [2] 量子相転移や一次元量子臨界系の参考書として例えば、T. Giamarchi, *Quantum Physics in One Dimension* (Oxford University Press, 2003) や、S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, 2011) と *Quantum Phases of Matter* (Cambridge University Press, 2023).
- [3] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* 77, 1413 (1996).
- [4] レビュー論文として例えば、Y. Ashida, Z. Gong, and M. Ueda, *Adv. Phys.* 69, 3 (2020).
- [5] レビュー論文として例えば、M. P. A. Fisher, V. Khemani, A. Nahum, and S. Vijay, *Ann. Rev. Cond. Matt. Phys.* 14, 335 (2022).
- [6] S. J. Garratt, Z. Weinstein, and E. Altman, *Phys. Rev. X* 13, 021026 (2023).
- [7] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, *Phys. Rev. B* 46, 15233–15262 (1992).
- [8] A. Furusaki and N. Nagaosa, *Phys. Rev. B* 47, 4631–4643 (1993).
- [9] Y. Ashida, S. Furukawa, and M. Ueda, *Phys. Rev. A* 94, 053615 (2016).
- [10] Y. Ashida, S. Furukawa, and M. Ueda, *Nat. Commun.* 8, 15791 (2017).
- [11] Y. Ashida, K. Saito and M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* 121, 170402 (2018).
- [12] Y. Fuji and Y. Ashida, *Phys. Rev. B* 102, 054302 (2020).
- [13] X. Cao, A. Tilloy, and A. De Luca, *SciPost Phys.* 7, 024 (2019).
- [14] M. Coppola, E. Tirrito, D. Karevski, and M. Collura, *Phys. Rev. B* 105, 094303 (2022).
- [15] O. Alberton, M. Buchhold, and S. Diehl, *Phys. Rev. Lett.* 126, 170602 (2021).
- [16] M. Van Regemortel, Z.-P. Cian, A. Seif, H. Dehghani, and M. Hafezi, *Phys. Rev. B* 126 (2021).
- [17] M. Buchhold, Y. Minoguchi, A. Altland, and S. Diehl, *Phys. Rev. X* 11, 041004 (2021).
- [18] X. Turkeshi, M. Dalmonte, R. Fazio, and M. Schiro, *Phys. Rev. B* 105, L241114 (2022).
- [19] I. Poboiko, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, *Phys. Rev. X* 13, 041046 (2023).
- [20] R. Islam, R. Ma, P. M. Preiss, M. E. Tai, A. Lukin, M. Rispoli, and M. Greiner, *Nature* 528, 7580 (2015).
- [21] J. M. Koh, S.-N. Sun, M. Motta, and A. J. Minnich, arXiv:2203.04338 (2022).
- [22] M. Gullans and D. Huse, *Phys. Rev. Lett.* 125, 070606 (2020).
- [23] C. Noel, P. Niroula, D. Zhu, A. Risinger, L. Egan, D. Biswas, M. Cetina, A. V. Gorshkov, M. J. Gullans, D. A. Huse, and C. Monroe, *Nat. Phys.* 18, 760 (2022).
- [24] M. Ippoliti and V. Khemani, *Phys. Rev. Lett.* 126, 060501 (2021).
- [25] Y. Li, Y. Zou, P. Glorioso, E. Altman, and M. P. A. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* 130, 220404 (2023).
- [26] Y. Ashida, S. Furukawa, and M. Oshikawa, arXiv:2311.16343 (2023).
- [27] Z. Gong, Y. Ashida, K. Kawabata, K. Takasan, S. Higashikawa, and M. Ueda, *Phys. Rev. X* 8, 031079 (2018).
- [28] A. Lavasani, Y. Alavirad, and M. Barkeshli, *Nat. Phys.* 17, 342 (2021).