任意の曲線に沿った等速運動が可能であることの証明*

永井佑紀

平成 17 年 5 月 30 日

等速でカーブを曲がるときは必ず円運動なのだろうか。今回力学（物理未修者クラス）の TA を行っていて疑問に思ったことのひとつである。

Formal な説明

ある物体の位置を $r(t)$ とすると、$r(t)$ は

$$\vec{r(t)} = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} \tag{1}$$

とかける。ここで、$\hat{x}$、$\hat{y}$ はそれぞれ x 方向、y 方向の単位ベクトルである。このとき、速度は

$$\vec{v(t)} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{x} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{y} \tag{2}$$

とかける。また、そのときの速さは

$$|\vec{v(t)}| = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} \tag{3}$$

とかける。

ここで、$r(t)$ が描く軌跡 $S(t)$(図 1) を導入しよう。この軌跡 S とは曲線の長さであり、まず x の関数としてあ

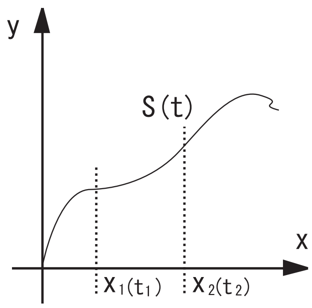

図 1: ある物体が描く軌跡

らわすと

$$S(x) = \int_{x_1}^{x_2} dl \tag{4}$$

となる。ここで、dl は微小線積素であり、ピタゴラスの定理より

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \tag{5}$$

*このノートは加藤先生との議論を後日改めてまとめたものである。

である。また、$dy = \frac{dy(x)}{dx}dx$ であるので、結局

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2} dx \tag{6}$$

となる。これを式 (4) に代入すると

$$S(x) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2} dx \tag{7}$$

となり、これで S を x の関数で表したことになる。

次に、S を t で表す。dx、dy を dt で表すと

$$dx = \frac{dx(t)}{dt}dt,\ dy = \frac{dy(t)}{dt}dt \tag{8}$$

とかけるから、式 (7) に代入すると、

$$S(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy(t)}{dx(t)}\right)^2} \frac{dx(t)}{dt}dt \tag{9}$$

となり、さらに変形すると

$$S(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt \tag{10}$$

となることがわかる。よって、

$$\frac{dS(t)}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} \tag{11}$$

となり、式 (3) から、

$$\frac{dS(t)}{dt} = |v(\vec{t})| \tag{12}$$

が得られる。

つまり、速さが一定の運動 $|v(\vec{t})| = const.$ であれば、$\frac{dS(t)}{dt} = const.$ を満たすことがわかる。逆に言えば、任意の曲線に対して $\frac{dS(t)}{dt} = const.$ である状況を考えれば、$|v(\vec{t})| = const.$ を満たす。故に、**任意の曲線にそった等速運動は可能である**ことが示された。

余談

どんな軌跡を描く運動であれ等速運動であれば、速度ベクトルと加速度ベクトルは直交する。それを示そう。

等速運動というのは、

$$\frac{d|v(\vec{t})|}{dt} = 0 \tag{13}$$

を満たすものを言う。また、この式を成分表示して微分を行うと

$$\begin{aligned}
\frac{d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}}{dt} &= \frac{1}{2}(2\frac{v_x}{dt}v_x + 2\frac{v_y}{dt}v_y + 2\frac{v_z}{dt}v_z)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} && (14) \\
&= \frac{(a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z)}{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|v(\vec{t})|} = 0 && (15)
\end{aligned}$$

となる。$|v(\vec{t})| \neq 0$ より、

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \tag{16}$$

が示された。

直観的な説明

ある任意の曲線があり、その上を等速で動いている物体を考える。

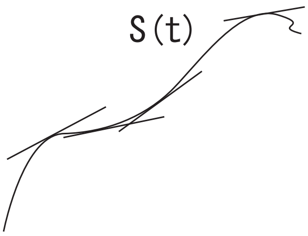

図 2: 曲線が連続で微分可能であれば、各点各点は線で近似できる。

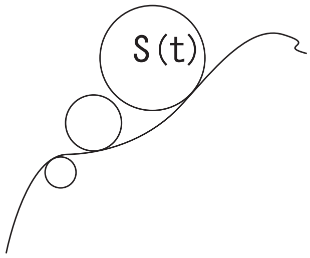

図 3: 曲線が連続で二階微分可能であれば、各点各点は円で近似できる。

曲線は連続で二階微分可能だとする。接円は、各点各点においてある曲率半径 $R(\vec{r})$ を持っている（図 2、図 3 を参照）。いま、等速運動を考えているので $v(\vec{r}) = const.$ である。したがって、等速円運動の際に成り立つ角速度 ω と半径 R の関係式

$$\omega \times R = v \tag{17}$$

が成り立つような ω を決めることができる。したがって、各点各点において角速度 $\omega(\vec{r})$ で等速円運動を描いていると考えても差し支えはない。

つまり、**等速でカーブを曲がったときは、そのカーブは常に等速円運動の一部である**といえる。円運動をつなぎ合わせて作ったカーブならば等速で運動する。**すべてのカーブが等速円運動の一部であるとはいえない**ことに注意。