

Introduction to Superconductivity

CHAPTER 4 GINZBURG-LANDAU THEORY

永井佑紀

2006年1月17日、24日

4.3 CALCULATIONS OF THE DOMAINWALL ENERGY PARAMETER

二章での中間状態についての議論において用いた、界面エネルギーのパラメータ $\gamma = H^2\delta/8\pi$ を計算する。ドメイン壁における $\psi(x)$ と $h(x)$ の一次元的変化は Fig. 4.3 に描かれている。定性的には、磁場の侵入によりギブスの自由エネルギーが下がり、 $\psi \neq \psi_\infty$ の領域では常伝導的な領域が生じており自由エネルギーがあがる。したがって、 $\kappa \ll 1$ のとき、常伝導的な寄与が大きい領域 $\sim (\xi - \lambda)$ が存在するので、界面エネルギーは正である。 $\kappa \gg 1$ のときは逆の理由で負になる。これは二章ですでに論じられたことであり、ここでは界面エネルギーを GL 理論を用いて定量的に考える。

GL 方程式を再掲すると

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (1)$$

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi - \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar e^*}{2m^*i} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{r}} \psi \right) - \frac{(e^*)^2}{m^*c} |\psi|^2 \mathbf{A} \quad (3)$$

である。この解を

$$\psi = 0 \quad \text{and} \quad h = H_c \quad x \rightarrow -\infty \quad (4)$$

$$\psi = \psi_\infty \quad \text{and} \quad h = 0 \quad x \rightarrow +\infty \quad (5)$$

という境界条件で考える。一次元での問題を考えており ψ は実数であるとする (波動関数に位相項がないとすると)、式 (2) の虚数項であるクロスタームを消去することができ式 (3) は $\mathbf{j} \propto |\psi(x)|^2 \mathbf{A}$ と簡単化できる。つまり、

$$\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\alpha + \frac{e^{*2}}{2m^*c^2} A^2 \right) \psi - \beta|\psi|^2\psi = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} - \frac{4\pi(e^*)^2}{m^*c^2} \psi^2 A = 0 \quad (7)$$

である。

しかし、この方程式の完全な解は数値的にしか求めることができない。したがって、界面エネルギーを形式的に簡単化した表現を求めることにする。

外場 H が H_c に固定されているので、ヘルムホルツの自由エネルギーではなく、ギブスの自由エネルギーを用いる。このとき、 B はドメイン壁の位置に依る。外場が臨界磁場 H_c のとき、ギブスの自由エネルギー密度は常伝導状態と超伝導状態では等しい。超伝導体内部 ($x \rightarrow \infty$) では磁場が存在せず、 $\psi = \psi_\infty$ であり、このときのギ

ブスの自由エネルギーは、磁場なし電流なしのヘルムホルツの自由エネルギー f_{s0} に等しい。 f_{s0} よりも自由エネルギーが大きくなっているとすれば、それは界面エネルギーが原因である。したがって、界面エネルギーは

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} (g_{sH} - f_{s0}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_{sH} - \frac{hH_c}{4\pi} - f_{s0} \right) dx \quad (8)$$

となり、 $f_{n0} - f_{s0} = H_c^2/8\pi$ と、GL 理論におけるヘルムホルツの自由エネルギーの表式を用いると

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{(h - H_c)^2}{8\pi} \right] dx \quad (9)$$

となる。ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi^* \quad (10)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \psi^* + \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \left(-\frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi^* \quad (11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \left[\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \psi^* \right] - \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \cdot \psi^* + \left(-\frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \cdot \psi^* \quad (12)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \left[\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \psi^* \right] + \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi \cdot \psi^* \quad (13)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi \cdot \psi^* \quad (14)$$

となるから、GL 方程式 (2) の右から ψ^* を掛けて積分したものを式 (9) に代入すると、

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{(h - H_c)^2}{8\pi} \right] dx \quad (15)$$

と表すことができる。よって、 $\gamma = (H_c^2/8\pi)\delta$ と定義したときの δ は

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\beta}{2H_c^2} 8\pi |\psi|^4 + \frac{(h - H_c)^2}{H_c^2} \right] dx \quad (16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\left(\frac{\psi}{\psi_\infty} \right)^4 + \left(1 - \frac{h}{H_s} \right)^2 \right] dx \quad (17)$$

となる。ここで、4.1 節において登場した式

$$|\psi_\infty|^2 \equiv \frac{mc^2}{8\pi e^2 \lambda_{\text{eff}}^2} \quad (18)$$

$$\beta = \frac{16\pi e^4}{m^2 c^4} H_c^2 \lambda_{\text{eff}}^2 \quad (19)$$

を用いた。式 (17) の積分内の第一項は凝縮エネルギーすることで得をする分を表し、第二項は磁場が侵入することで損をする分を表している。この二項がバランスすることで δ の正負が決まる。 ψ と h は定量的には Fig.4.3 のように表されており、 $\kappa \ll 1$ であるか $\kappa \gg 1$ であるかで δ の正負が異なることがわかる。 κ の極限以外において、積分を具体的に実行し δ を評価するには、 $h(x)$ と $\psi(x)$ の数値的な解が必要になる。極限においては、以下の流れで計算することができる。

$\kappa \ll 1$ のとき、 $\xi \gg \lambda$ であり、明らかに界面エネルギーの主要な部分は A が小さい領域から生じる。したがって、式 (6) を A の 0 次までとるとする。そして $d\psi/dx$ を両辺にかけて積分すると、

$$\frac{\hbar^2}{4m^*} \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 - \frac{\alpha}{2} \psi^2 - \frac{\beta}{4} \psi^4 = \text{const.} \quad (20)$$

となる。ここで、 $\psi = \psi_\infty f$ とし、無次元量の f の方程式に書き直すと、

$$\frac{\hbar^2}{4m^*} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 - \frac{\alpha}{2} f^2 - \frac{\alpha}{4} f^4 = \text{const.} \quad (21)$$

となる。さらに変形すると、

$$-\xi^2 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 - f^2 - \frac{1}{2} f^4 = \text{const.} \quad (22)$$

となる。ここで、 $-\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2\alpha m^*}$ とおいた。 $x \rightarrow \infty$ において $\psi = \psi_\infty$ であるから、左辺の定数が求まり、

$$-\xi^2 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 - f^2 - \frac{1}{2} f^4 = -\frac{1}{2} \quad (23)$$

が解くべき方程式である。上式をさらに変形すると、

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}\xi} (1 - f^2) = \frac{df}{dx} \quad (24)$$

となる。この非線形微分方程式は Riccati 方程式の一種であり、解は

$$f = \pm \tanh \left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi} \right) \quad (25)$$

となる。 $x \rightarrow \infty$ で $f \rightarrow 1$ となることから、正符号をとればよいことがわかり、結局、

$$f = \tanh \left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi} \right) \quad (26)$$

である。¹ $x = 0$ において $f = 0$ である。

式 (13) 式にこの解を代入すると、

$$\delta = \int_0^\infty \left[1 - \tanh^4 \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right] dx \quad (27)$$

$$= \int_0^\infty \cosh^{-2} \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \left[1 + \tanh^2 \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right] dx \quad (28)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{k} \int_0^\infty \frac{d}{dX} \tanh X [1 + \tanh^2 X]^2 dX \quad (29)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{k} \left([\tanh X (1 + \tanh^2 X)]_0^\infty - 2 \int_0^\infty \frac{\tanh^2 X}{\cosh^2 X} dX \right) \quad (30)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{k} \left(2 - 2 \frac{1}{3} [\tanh^3 X]_0^\infty \right) \quad (31)$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3k} = \frac{4\sqrt{2}\xi}{3} \quad (32)$$

となる。ここで、 $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}} = 1/k$ を用いた。

$\kappa \gg 1$ においては、 $\psi \sim \psi_\infty$ であり、 A のみが発動するとすればよい。したがって、式 (7) を用いて

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{4\pi e^{*2}}{m^* c^2} \psi_\infty A \quad (33)$$

と $\frac{dA}{dx} = h$ を用いれば、

$$h = H_c e^{-x/\lambda} \quad (34)$$

¹GL 方程式が並進対称性をもつため、 $\tanh \left(\frac{x-a}{\sqrt{2}\xi} \right)$ も解である。ここで、金属 NS 界面での境界条件を用いれば (Tinkham 4.15a)、 $\tanh \left(\frac{x-b}{\sqrt{2}\xi} \right)$ が解となる。

と書くことができる。したがって、

$$\delta = \int_0^\infty [-1 + (1 - e^{-x/\lambda})^2] \quad (35)$$

$$= -1.5\lambda \quad (36)$$

となる。これは、Tinkham の値とは異なる。無限遠方での ψ を $\psi < \psi_\infty$ とすれば近似は改善され、Tinkham の値に近づくのではないかと考えられる。

結局、極限においては

$$\delta = \frac{4\sqrt{2}\xi}{3} = 1.89\xi \quad \kappa \ll 1 \quad (37)$$

$$\delta = \frac{-8(\sqrt{2}-1)\lambda}{3} = -1.104\lambda \quad \kappa \gg 1 \quad (38)$$

となる。

界面エネルギーが負から正になるクロスオーバー領域は、 $\kappa = 1/\sqrt{2}$ で起こり、注意が必要である。この κ の値は、Ginzburg と Landau が原論文で数値的な計算をして明らかになった。また、従来の層状の中間状態は κ が小さい値をとるときのみ生じるということがすでに予想されていた。しかし、Abrikosov の論文により道が切り開かれるまでは、誰も κ が大きく界面エネルギーが負になることによって生じるふるまいを根本的にまったくわかっていなかった。たちまち、Abrikosov の論文は第二種超伝導体の研究という分野を作り出した。第二種超伝導体 (Type 2 superconductivity) という名前は、彼が $\kappa > 1/\sqrt{2}$ である物質に名づけたものである。次の章において、負の界面エネルギーが、常伝導状態の束の中に磁束を量子力学的最小単位 $\Phi_0 = hc/2e$ に量子化し、その一本一本が別個に試料を貫く状態にまで領域を分割することを述べる。磁束管は通常整列し、その軸の周りでは $\phi \rightarrow 0$ となる。第一種超伝導体における中間状態とは違い、第二種超伝導体の mixed state と呼ばれるこの状態は、たとえ試料の demagnetizing factor が零であるときでさえ、出現する磁場範囲は有限である。

4.4 CRITICAL CURRENT OF A THIN WIRE OR FILM

界面エネルギーの計算を行った際、すぐに、数値的な解が必要になることが分かった。したがって、この節では厳密な解析解が存在するような重要ないくつかの単純な例を考えることにする。ここでは、より複雑な問題に戻る前に、GL 理論を用いてよく知られたことを導くことになる。

まず、最も簡単な問題は、磁場が摂動的に効いており電流が非常に弱い状況、つまり、どの場所においても $|\psi| = \psi_\infty$ が成り立っている状況である。このとき、GL 理論は London 理論へと移行する。

より面白い例は、強い磁場あるいは電流により $|\psi|$ から ψ_∞ からずれ、しかし $|\psi|$ はどこでも同じ値をとるような例である。これは試料が、外場と同じ方向を向いた非常に細い線状であるか薄い膜であるとき、つまり、その細さあるいは厚さ d が $d \ll \xi(T)$ であり $|\psi|$ のどんな変動もその幅でおきるような状況に起こる例である。この状況では、 $|\psi|$ の変動の特徴的な長さが $\xi(T)$ であるために ψ の値が非常に小さく、自由エネルギーの $(\nabla|\psi|)^2$ に比例する項は他の項よりも大きな寄与をする。このとき、 $\psi(\mathbf{r}) = |\psi|e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ と近似する。ここで、 $|\psi|$ は定数である。このような近似のもとでは、電流と自由エネルギー密度は

$$\mathbf{J}_s = \frac{2e}{m^*} |\psi|^2 \left(\hbar \nabla \varphi - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) = 2e |\psi|^2 \mathbf{v}_s \quad (39)$$

$$f = f_{n0} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + |\psi|^2 \frac{1}{2} m^* v_s^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi} \quad (40)$$

となる。ここで、一般性を損なわないために $m^* = 2m$ とはおかないことにした。

さて、薄膜あるいは細線に様な電流が流れている状況を想定し、このとき方程式がどうなるのかを見ることにする。磁場による項の全体のエネルギーへの寄与は、電流による運動エネルギーより小さい。なぜならば、磁場は導体に磁場侵入長 λ だけ侵入しているが、電流は一樣に流れていると想定しているからである。したがって、導

体の断面積と λ^2 の比程度に磁場の項は小さい。つまり、十分に薄い導体においてはつねにこの項を無視することができるということである。そのとき、 v_s が与えられれば、適切な $|\psi|$ を見つけることで式 (40) を最小化できる。そしてその値は

$$|\psi|^2 = \psi_\infty^2 \left(1 - \frac{m^* v_s^2}{2|\alpha|}\right) = \psi_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{\xi m^* v_s}{\hbar}\right)^2\right] \quad (41)$$

となる。ここで二つ目の表現式は ξ と $m^* v_s$ からなり、 m^* 自体を含んでいるので m^* の選び方に関しては不変量である。このとき電流は

$$J_s = 2e\psi_\infty^2 \left(1 - \frac{m^* v_s^2}{2|\alpha|}\right) v_s \quad (42)$$

と与えられる。電流を v_s の関数と考えれば、図.4.4のように $\partial J_s / \partial v_s = 0$ であるとき、言い換えれば $\frac{1}{2} m^* v_s^2 = |\alpha|/3$ のとき、電流は最大値 J_c をとり、このとき $|\psi|^2 / \psi_\infty^2 = 2/3$ である。この電流を臨界電流と呼び、

$$J_c = 2e\psi_\infty^2 \frac{2}{3} \left(\frac{2|\alpha|}{3m^*}\right)^{1/2} = \frac{cH_c(T)}{3\sqrt{6}\pi\lambda(T)} \propto (1-t)^{3/2} \quad (43)$$

と表現することが出来る。ここで、二個目の表現式の中に現れる物理量は、すべて十分に測定可能な量であり、また臨界電流は臨界温度 T_c 近傍で $(1-t)^{3/2}$ に比例した量である。このとき、臨界運動量は

$$p_c = m^* v_s = \frac{\hbar}{\sqrt{3}\xi(T)} \quad (44)$$

と表現できる。臨界速度はうまく定義することは出来ない。なぜならば、 m^* のとりかたによって変わってしまう量だからである。

ここで一つ注意しなければならないことがある。 v_s は独立な値をとれる量であるとして考えていたが、実際は $J_s \propto |\psi|^2 v_s$ という関係があり、独立ではない。かといって、 v_s を独立にとれるとしたことはさほど不都合は生じない。これまでの議論は、もし電流源からの仕事による誘導起電力が存在しないとしたときにのみ有効に用いることの出来るヘルムホルツの自由エネルギーを用いている。 v_s を固定して考えるということはこの場合不都合はない。なぜならば、 v_s を変化させるには起電力が必要であるからである。起電力が時間的に変化すれば、それに応じて誘導起電力が生じる。 v_s を固定して考えれば誘導起電力が生じないため、外からの仕事がないときに有効に使うことの出来るヘルムホルツの自由エネルギーが使えるのである。もし、電流を独立にとれる値と考えたいのならば、2章で磁場に対して行ったように、自由エネルギーをラグランジュ変換する必要がある。ヘルムホルツの自由エネルギーからギブスの自由エネルギーに変換するには、ジェネレータが行う仕事を引けばよい。引くべき仕事は $m^* v_s \cdot J_s / 2e$ である。このとき、ギブスの自由エネルギー密度は

$$g = f - \frac{m^* v_s J_s}{2e} \quad (45)$$

$$g = f_{n0} + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 - \frac{m^* J_s^2}{8e^2|\psi|^2} + \frac{\hbar^2}{8\pi} \quad (46)$$

と書くことが出来る。ここで、式 (39) を用いて v_s を消去した。 J_s を固定して上式を最小にする $|\psi|^2$ を探すためには、 $|\psi|^2$ に関して三次の方程式:

$$\frac{m^* J_s^2}{8e^2} = -\alpha|\psi|^4 - \beta|\psi|^6 \quad (47)$$

と解かなければならない。これは代数的には厄介な方程式であるが、さきほど出した J_s の最大値はこの方程式でも成り立っているはずなので $|\psi|^2 = -\frac{2}{3}(\alpha/\beta) = \frac{2}{3}\psi_\infty^2$ のとき J_s は臨界電流 J_c である。

GL 理論での臨界電流と London 理論における臨界電流を比べることは興味深い。London 理論での臨界電流は、電流で生じる運動エネルギー密度と凝縮エネルギー密度が等しくなるときの電流であり

$$\frac{1}{2} n_s m v_c^2 = \frac{2\pi}{c^2} \lambda^2 J_c^2 = \frac{H_c^2}{8\pi} \quad (48)$$

であるから、

$$J_{c, \text{London}} = \frac{cH_c}{4\pi\lambda} \quad (49)$$

となる。これは二章で得られた結果である。この値は、より厳密な GL の結果 (43) と $(3\sqrt{6}/4) = 1.84$ 倍だけ異なっている。なぜならば、GL 理論では $|\psi|^2$ は式 (41) の第二項のように v_s が増えると減少するが、London 理論では変化しないとし非線形項を無視しているからである。

また、GL 理論の結果と微視的理論の結果を比べるのも興味深い。もちろん、微視的理論では特別な状況をのぞいては数値的な計算が必要になる。Bardeen はそのような計算でのとても有益なレビューを行っている。 T_c 付近で

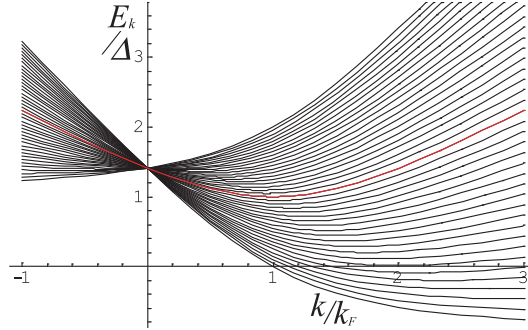


図 1: 準粒子のエネルギーシフト。 $v_s \propto -k$ であるとき、励起した準粒子は電流を減らす方向へ流れる。また、シフト $\hbar k_F v_s$ がギャップ $\Delta(0)$ と等しくなるときの準粒子が絶対零度でも存在する。赤線はシフトがないときの分散関係。

は、GL 理論による結果は期待通りよい。zero-temperature 極限では、状況はかなり異なってくる。一様な v_s の分布があるとき、準粒子のエネルギーは $\hbar k \cdot v_s$ だけずれる。(これは章 10.1.2 で詳しく議論するが、三章の 3.108 式から速度 $ea(0)/mc$ は一様なベクトルポテンシャル $a(0)$ により誘起されるということに注意すればわかる。図.1) それゆえに、

$$v_s = \frac{\Delta(0)}{\hbar k_F} = \frac{\hbar}{\pi m \xi_0} \quad (50)$$

のとき、ギャップはいくつかの状態においてゼロになる。この depairing velocity より小さいときは、すべての電子が超電流に寄与し、 J_s は厳密に v_s に比例している。また、depairing velocity 上ではいくつかの励起がゼロエネルギーで生じ、ギャップは急激に小さくなり、可能な最大電流は、depairing が始まる速度における電流よりたった 2 パーセントだけ大きいだけになる。それゆえに、 $T = 0$ における $J_s(v_s)$ 曲線は、最初 v_s に比例し、その後急激に減少しゼロになる。これは T_c 近傍での GL 理論の図.4.4 とは異なる振る舞いである。

これらの結果を実験的に確かめることは、もし横方向の次元が λ と ξ と比較して小さければもっとも簡単である。このとき、 J_s と $|\psi|^2$ は断面において一様である。 $1\mu m$ の直径の試料で実験が行われたが、ゆらぎの効果で理論が予測するより早く臨界電流に達してしまっている。より突っ込んだ議論は後の章で行う。

実験が簡単であるという理由で、臨界電流の測定実験はたくさん行われた。このときの試料は λ や ξ よりも厚かった。これらの実験においては、測られた臨界電流 J_c は多くの理由から式 (43) よりも大抵遥かに小さかった。第一に、一様な厚さと構造を持つ膜を作ることがいくぶん難しいということである。さらに深刻なのは、電気力学方程式は膜の端に電流を集中させてしまうということである。なぜならば、膜の端においては電気力線が円を描いて集中してしまうからである。これにより電流は一様ではなくなり、膜の端の情報により重要になってしまう。膜の端は大抵他の場所より薄く、完全ではない。この問題をなるべく目立たなくするには三つの方法がある。(1) λ_{\perp} よりも薄くする。そのとき厚さ d と幅 w の積は λ^2 よりも小さくなる。このとき、たとえ $w > \lambda$ であったとしても J_s は一様に近くなる。(2) ground-plane な形状を用いる。この形状は、試料は薄い絶縁体を挟んでより大きく厚い超伝導体の上に置かれている。このとき、超伝導基盤は磁束を整列させ膜に平行にする。そしてそのことにより電流が一様に保たれることになる。(3) 膜を円筒型にする。そうすれば端がなく、対称性から同心円状の様な電流密度が保証される。十分に注意深く行えば、これらのテクニックのどれを使っても臨界電流が理論値の 10 パーセント程度まで大きくすることが可能になる。

理論のより微視的な検証は、 $J < J_c$ 以下の電流においてギャップ $\Delta(J)$ を決めることのできるトンネル効果測定

によって行うことが出来る。式 (41) より、 $|\psi|$ 、つまり Δ は、電流が大きくなれば複雑な振る舞いをするだろうが、最初は J^2 で減少する。ゼロ電圧のときの微分コンダクタンスの上昇によって裏付けられたこの Δ の減少は Lavine が最初に発見した。より決定的な、全スペクトル状態密度を測定した結果に基づく証拠は、後に Mitescu によって得られた。

4.5 FLUXOID QUANTIZATION AND THE LITTLE-PARKS EXPERIMENT

Little と Parks が独創的な実験を行った。その実験において彼らは外部の状況をコントロールして電流よりも m^*v_s を固定し、flux が量子化されているのではなく fluxoid が量子化されているということを明らかにした。実験は、磁場の方向に軸を持つ薄い超伝導円筒の抵抗転移を測定したものである。これにより、円筒内に存在する磁束に依存して臨界温度が $\Delta T_c(H)$ だけずれているということを推測できた。この節では、Ginzburg-landau 理論の枠組み内でこの実験の解析を試みる。

4.5.1 The Fluxoid

磁場が存在している多重連結した超伝導体の状態を解析するために、F. London は、超伝導体を貫通している穴（あるいは常伝導領域）を関連づけられる fluxoid という概念を導入した。彼の定義は

$$\Phi' = \Phi + \left(\frac{4\pi}{c}\right) \oint \lambda^2 \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{s} = \Phi + \left(\frac{m^*c}{e^*}\right) \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{s} \quad (51)$$

である。ここで回路を貫く磁束 Φ として

$$\Phi = \int \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (52)$$

を用いた。London 方程式

$$\mathbf{h} = -\text{crot}(\Lambda \mathbf{J}_s) \quad (53)$$

$$\Lambda = \frac{4\pi\lambda^2}{c^2} \quad (54)$$

が成り立つような超伝導体においては、hole あるいは常伝導領域を取り囲むような積分経路以外では必ず $\Phi' = 0$ になる。これは、ある積分経路の内側がすべて超伝導体であれば、第一項の被積分関数においてすべての領域で London 方程式を用いることができるために、第一項と第二項が等しくなるからである。もし、超伝導体ではない領域が存在する場合は、第一項と第二項の差し引きのなかで、超伝導領域ではない領域の積分のみが残ることになり、その領域を囲むどんな閉曲線でも同じ値となる。言い換えれば、ある hole あるいは常伝導領域を取り囲んだ積分経路では、それがどんな経路であっても Φ' は同じ値をとる。同様に、 \mathbf{h} が時間変動するようなときも、他の London 方程式によって誘起された電流 \mathbf{J}_s の変化は Φ' を一定に維持するのに十分である（もちろん、超伝導状態から常伝導状態へと移行してしまうような強烈な変化であればそうとは限らない）。この二つの保存則が、ある hole に対してそれを取り囲むようなすべての経路に対し Φ' をただ一つの値に決める。事実、London は Φ' がフラクソイド量子 hc/e^* を単位とした離散的な値しかとれないということを議論した。これは式 (51) に Bohr-Sommerfeld の量子化条件を課せば導くことができる。このとき、

$$\Phi' = \frac{c}{e^*} \oint \left(m^* \mathbf{v}_s + \frac{e^* \mathbf{A}}{c} \right) \cdot d\mathbf{s} = \frac{c}{e^*} \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{s} \quad (55)$$

$$= n \frac{hc}{e^*} = n\Phi_0 \quad (56)$$

となる。

超伝導の微視的理論が出てくる前であったので、London は e^* を e としていた。いまは、電子対が作られることが原因であることがわかっているので $e^* = 2e$ であり、具体的な値は、

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2.07 \times 10^{-7} \text{G-cm}^2 \quad (57)$$

$$= 2.07 \times 10^{-15} \text{Wb (webers)} \quad (58)$$

となる。この値は、実験的には確かめられている。その実験は、十分に薄い中空の円筒の中に捕われている磁束を測定したものである。十分に薄ければ $v_s \rightarrow 0$ とみなすことができ、式 (51) よりそのときの flux と fluxoid は区別がつかない。

半古典的の量子化条件や厳密ではない London の議論を用いるとこのフラクソイドの議論も厳密性をかくと考えるかもしれない。しかし、GL 理論においても fluxoid の量子化が起こることを示すことが出来る。そのとき、一価の複素数超伝導秩序パラメータ ψ が存在するという考えればよい。具体的には、式 (39) を変形し積分した式：

$$\oint (\nabla\varphi) ds = \oint \left(\frac{m^* v_s}{\hbar} + \frac{e^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right) ds \quad (59)$$

の左辺が $2\pi n$ (n は constant) になることを利用する。ここで、周回積分は今までと同じように経路をとる。したがって、

$$2\pi n = \frac{e^*}{c\hbar} \oint \left(\mathbf{A} + \frac{cm^* v_s}{e^*} \right) ds = \frac{e^*}{c\hbar} \Phi' \quad (60)$$

$$\Phi' = \frac{\hbar c}{e^*} n \quad (61)$$

となる。

fluxoid の量子化は、原子系における角運動量の量子化に対する巨視的な類似例となっている。それゆえに、磁束が侵入した超伝導体の多くの問題に対して効果的な道具にそれがなるといことは驚くべきことではない。

4.5.2 The Little-Parks Experiment

次に、Little-Parks の実験の解析を行う。半径 R の十分に薄い円筒に、磁場 H がかかっているものとする。ここで、外場と円筒内の磁場を区別する必要はない。なぜならば、我々は $T_c(H)$ の変化を見つけないのであり、臨界温度において $|\psi|^2 \rightarrow 0$ であり、それゆえに $J_s \rightarrow 0$ であり両者は同じ値をとるからである。円筒上における $|v_s|$ が変わらないことに注意して、式 (51) を変形すると、

$$v_s = \frac{\hbar}{m^* R} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (62)$$

となる。ある H に対して Φ の値が決まると、円筒内の電流のエネルギーは v_s が最小となるような整数 n によって最小化される。それゆえに、 n の選択によって、その系における超伝導状態でいられる最高の可能な温度が変わる。このとき、 v_s は Φ/Φ_0 の関数として図.4.5 のように周期的になる。 v_s が決まれば式 (41) を適用して $|\psi|^2$ の減少の様子を知ることが出来る。とりわけ、 $|\psi|^2 = 0$ となる転移点は

$$\frac{1}{\xi^2} = \left(\frac{m^* v_s}{\hbar} \right)^2 = \frac{1}{R^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad (63)$$

のときである。また、 ξ は温度 t の関数として、

$$\xi(T) = 0.74 \frac{\xi_0}{(1-t)^{1/2}} \quad \text{pure} \quad (64)$$

$$\xi(T) = 0.855 \frac{(\xi_0 t)^{1/2}}{(1-t)^{1/2}} \quad \text{dirty} \quad (65)$$

であるから、 $1/\xi^2$ は $(1-t)$ に比例していることが分かる。以上より、臨界温度の磁場 H による変動は

$$\frac{\Delta T_c(H)}{T_c} = 0.55 \frac{\xi_0^2}{R^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad \text{pure} \quad (66)$$

$$\frac{\Delta T_c(H)}{T_c} = 0.73 \frac{\xi_0 l}{R^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad \text{dirty} \quad (67)$$

となる。(図.2²⁾)

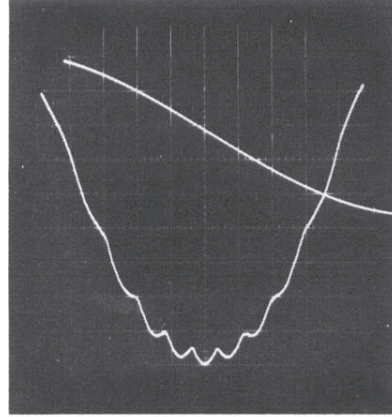


FIG. 2. Lower trace: variation of resistance of tin cylinder at its superconducting transition temperature as a function of magnetic field. Upper trace: magnetic field sweep.

図 2: Little-Parks の実験 (原論文からの引用)。

T_c が最も低下するのは、 $n - \Phi/\Phi_0 = \frac{1}{2}$ のときである。この点において、 $\Delta T_c/T_c$ は clean と dirty においてそれぞれ $0.14\xi_0^2/R^2$ と $0.18\xi_0 l/R^2$ となる。実際に使われた試料は、直径 $1\mu\text{m}$ の有機繊維の周りに蒸着させて作られた典型的な dirty な薄いフィルムであった。 $R = 7 \times 10^{-5} \text{ cm}$ 、 $\xi_0 = 2 \times 10^{-5} \text{ cm}$ 、 $l = 10^{-6} \text{ cm}$ 等の典型的な値を代入すれば、 $\Delta T_c|_{\text{max}} \sim 0.8 \times 10^{-3} T_c \approx 3 \times 10^{-3} \text{ K}$ となり、容易に測定可能な値になる。この直径では、磁場による周期は、 $\Phi_0/\pi R^2 = 14 \text{ G}$ となる。

$T_c(H)$ を求めるために理想的な問題を考えたが、実際の実験では、磁場を変えたときのフィルムの抵抗の周期的な変動を測定する。これは測定を簡単化するために、抵抗の転移が有限の幅であるということを利用して。なぜなら、転移領域において dR/dT を測定することで、 $\Delta R(H)$ を $\Delta T_c(H)$ に変換できるからである。しかしながら、推測される $\Delta T_c(H)$ が転移領域における抵抗のレベルにある程度よりように、抵抗転移の形が H の変化に伴って変化して観測されるので、これは完全な定量的な測定ではない。その他の困難として、 T_c が H の変化によって非周期的な二次関数的な変位を起こすということである。これはときどき観測され、磁場の設定方向が完全に一致していないことによると思われる。幸運なことに、実験や解析の進歩により、これらの問題の多くは解決され、この理論のより満足のゆく議論ができるようになっている。

²W. A. Little and R. D. Parks, Phys. Rev. Lett. **9**, 9 (1962)