

Introduction to Superconductivity

CHAPTER 4 GINZBURG-LANDAU THEORY

永井佑紀

2006年2月7日,14日

4.10 NUCLEATION IN FILMS AND FOILS

表面核生成磁場 H_3 の議論において、暗黙のうちに半無限の媒体を仮定していた。したがって、直接関係する一つの表面を除いて他の表面を無視することができた。次に我々は、薄膜における超伝導の核生成を考慮する。このとき、両側の表面を考慮しなければならない。最初に、 $|\psi|$ が一定とみなせるくらい十分に薄い ($d \ll \xi$) 薄膜においての、臨界磁場の角度依存性を議論する。次に、厚さが $d \approx \xi$ 程度の薄膜を考える。これは単なる興味があるからだけではなく、バルク試料の vortex 状態への簡単な導入になりうるから考えるのである。

4.10.1 Angular Dependence of the Critical Field of Thin Films

磁場に垂直な表面近傍においては、 H_{c2} が超伝導の核生成の臨界磁場となることは以前述べた。これは、このときの固有関数がどこでも $\partial\psi/\partial z = 0$ であり、それゆえに法線方向微分が零であるという境界条件を自動的に満足していたからである。同じ理由で、薄膜における垂直臨界磁場 $H_{c\perp}$ もまた H_{c2} で与えられると考えられる。もし、薄膜がとても薄いならば、 κ の適当な有効値を式 (4.62) に代入しさえすればよい。このとき κ は厚さ d に依るとする。実際には、節 3.11.4 で解析したように、 λ_{eff} の厚さ依存性を考えに入れ、4.62 式の中間の式を使ったほうがより便利なきがある。

もう一つの極限、つまり平行臨界磁場の場合は、4.6 節ですでに考察されている。薄膜においてこれら二つの極限値が大きく異なるため、 $H_{c\perp}$ よりも $H_{c\parallel}$ の方がはるかに大きく、したがってそれらの中間領域を考えるために角度依存性を考えることは興味深いだろう。この問題の最初の取り扱いの中で、Tinkham はフラクソイドの量子化をもとに単純な物理的議論を行った。このとき、 $H_c(\theta)$ が

$$\left| \frac{H_c(\theta) \sin \theta}{H_{c\perp}} \right| + \left(\frac{H_c(\theta) \cos \theta}{H_{c\parallel}} \right)^2 = 1 \quad (1)$$

という関係により間接的に決まるような解を得た。

以下、線形 GL 方程式を用いて上式を証明する。まず、 yz 平面に平行におかれた厚さ d の薄膜を考える。薄膜の中央を $x = 0$ とする。このとき、平面から測った角度 θ で磁場が傾いているとする。そして、ベクトルポテンシャルを $A_y = H(x \cos \theta - z \sin \theta)$ とする。線形 GL 方程式は

$$\left(\frac{\nabla}{i} - \frac{2\pi\mathbf{A}}{\Phi_0} \right)^2 \psi = \frac{\psi}{\xi^2} \quad (2)$$

と書き表すことができる。この式にベクトルポテンシャルの値を代入して展開すると

$$-\nabla^2 \psi + \frac{4\pi i}{\Phi_0} H(x \cos \theta - z \sin \theta) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0} \right)^2 (x \cos \theta - z \sin \theta)^2 \psi = \frac{\psi}{\xi^2} \quad (3)$$

となる。yz 方向には大きく広がった薄膜を考えており、磁場はつねに y 軸に垂直であり微分方程式には y が含まれないため、 ψ と y は分離して考えることができる。また $d \ll \xi$ であれば、 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ としてもよい。ゆえに線形 GL 方程式は

$$-\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \left(\frac{2\pi H}{\Phi_0}\right)^2 (x^2 \cos^2 \theta - 2xz \cos \theta \sin \theta + z^2 \sin^2 \theta) \psi = \frac{\psi}{\xi^2} \quad (4)$$

となり、 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ から $x \rightarrow \langle x \rangle$ 、 $x^2 \rightarrow \langle x^2 \rangle$ と平均値で置き換えると、

$$-\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \left(\frac{2\pi H \cos \theta}{\Phi_0}\right)^2 \frac{d^2}{12} \psi + \left(\frac{2\pi H z \sin \theta}{\Phi_0}\right)^2 \psi = \frac{\psi}{\xi^2} \quad (5)$$

$$-\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \left(\frac{2\pi H \sin \theta}{\Phi_0}\right)^2 z^2 \psi = \left(\frac{1}{\xi^2} - \left(\frac{2\pi H d \cos \theta}{2\sqrt{3}\Phi_0}\right)^2\right) \psi \quad (6)$$

となる（テキストにおいては、自由エネルギーが最小となるように変分法を用いてこの方程式を導出している）。この形の微分方程式は、調和振動子の微分方程式であるから、基底状態の固有関数と固有値が

$$\psi = c \exp(-\pi H \sin \theta z^2 / \Phi_0) \quad (7)$$

$$\epsilon = \frac{2\pi H \sin \theta}{\Phi_0} \quad (8)$$

と求まり、

$$\frac{2\pi H \sin \theta}{\Phi_0} = \left(\frac{1}{\xi^2} - \left(\frac{\pi H d \cos \theta}{\sqrt{3}\Phi_0}\right)^2\right) \quad (9)$$

となる。また、 $\xi = \Phi_0 / (2\sqrt{2}\pi H_c \lambda_{\text{eff}})$ 、 $H_{c\parallel} = 2\sqrt{6}H_c \lambda_{\text{eff}} / d$ 、 $H_{c\perp} = H_{c2}$ を用いれば、

$$H_{c\parallel} = \frac{\sqrt{3}\Phi}{\pi d \xi} \quad (10)$$

$$H_{c\perp} = \frac{\Phi_0}{2\pi \xi^2} \quad (11)$$

となるから、これらを代入すると式 (1) が得られる。ただし、左辺の絶対値については、最低固有値が正値実数である要請から得られる。

また、

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{H_c(\theta) \sin \theta}{H_{c\perp}}\right) = 2 \frac{d}{d\theta} \left(\frac{H_c(\theta) \cos \theta}{H_{c\parallel}}\right) \left(\frac{H_c(\theta) \cos \theta}{H_{c\parallel}}\right) \quad (12)$$

$$\frac{H_c}{H_{c\parallel}} = 2 \frac{H_c}{H_{c\parallel}^2} \frac{dH_c}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \quad (13)$$

$$\left|\frac{dH_c}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{H_{c\parallel}^2}{2H_{c\perp}} > 0 \quad (14)$$

であるから、 $\theta = 0$ にむかって $H_{c\parallel}$ に収束するように H_c が変化するのはなく、 $\theta = 0$ においてカスプを持つように変化する。

近似のよさは、より一般的な変分試行関数を考えることによって確かめることができる。その一つの方法は x 方向の変化を取り入れることである。このようにすることで、 $H_{c\parallel}$ に対する補正が $d^3/100\xi^2$ 程度であると見積もられるが¹、一方で $|dH_c(\theta)/d\theta|_{\theta=0}$ に対する補正は d^2/ξ^2 程度であると見積もられる。したがって、 $d/\xi \ll 1$ である限り、両極限的な値と中間的な角度への補完に関する結果は簡単であるが、十分正確なはずである。 d/ξ がそのような十分小さい場合ではない場合について、幾分より正確な形は Yamafuji(山藤)らによって与えられている。Saint-James は、 $\theta = 0$ での傾きの厳密な計算機による解を得た。彼の結果は、 $d < \xi$ において我々の解析的近似解 (14) が大変良い近似であるということを導いたが、臨界厚さ $d_c \approx 1.8\xi$ でのそのふるまいに特異な変化が現れる事を見出した。この厚さにおいては、表面解がより好ましくなる。我々は今、そのような中間の厚さの膜における核生成について考えることにする。簡単のため、磁場が膜に平行な場合についてのみ、我々の興味を限定することにする。

¹前節脚注参照

4.10.2 Nucleation in Films of Intermediate Thickness

我々は $d \ll \xi$ から出発し、 d を増加したとき何が起こるか考えてみる。まずはじめに、 ψ が x から独立であるとした近似を緩めなければならない。以前に注意したように、これを取り扱う一つの方法は変分法である。たとえば、 x 依存性を $x = \pm d/2$ において $d\psi/dx = 0$ という境界条件を満たすように

$$1 + c \cos \frac{2\pi x}{d} \quad (15)$$

と取り、自由エネルギーを極小化するように c を選ぶ。Tinkham による変分法の概略は以下のとおりである。自由エネルギーを

$$F = \int \left\{ \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 + \left(\frac{2\pi H x}{\Phi_0} \right)^2 |\psi|^2 - \frac{|\psi|^2}{\xi^2} \right\} dV \quad (16)$$

として、 ψ は z 方向に変化しないとし $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ とする。このとき、試行関数を $\psi(x) = 1 + c \cos \frac{2\pi x}{d}$ として c を極小化するのである。ここでは、変分法の詳細は Tinkham の原論文を参照してもらうことにして結果だけを述べる。解は、 $c > 0$ 、すなわち ψ は膜表面近くで減少する傾向があり、そこでは、定性的な理由から明らかなように $\frac{1}{2} m^* v_s^2$ が大きくなっている。以前注意したように、この改良された ψ によってわずかに高い臨界磁場、すなわち

$$H_{c||} = \frac{2\sqrt{6} H_c \lambda}{d} \left(1 + \frac{9d^2}{\pi^6 \xi^2} \right) \quad (17)$$

を導くことができる。²

さて、修正された臨界磁場の、第二項は 3% を越すことは決してありえない。なぜならば、 $d > d_c \approx 1.8\xi$ のとき、この対称的な解は近接している二つの表面が存在する場合に適するように修正された Saint-James と de Gennes の表面解に移行するからである。いま、これがどのように導出されるかを見てみることにする。

一つの表面での核生成を解析する際には、有効ポテンシャルの極小値は表面より背後へ距離 $\sim \xi$ だけ離れたところにくるように $k_y(x_0)$ を選ぶことによって最適化できることを前節で、見てきた。明らかに、二つの表面が十分接近することで有効ポテンシャルの二つの極小が互いに接近し、厚さ $d_c \approx 2\xi$ に達したとき、二つの表面での解はその性質が定性的に異なってくると予想される。 $d < d_c$ については、最小の固有値が実現する最も高い臨界磁場が $k_y = x_0 = 0$ で得られるため、有効ポテンシャルの極小値は膜の中心面にある。このような場合は、前の文節で述べた対称解に相当する。しかし、 $d > d_c$ に関しては、 x_0 についての最適な場所は中心からずれていき、二つの表面のうちどちらか一つの表面の背後にある最適な距離を保った場所にとどまる。数値的な計算をせずに d_c での移り変わりの詳細を予測することは困難である。そのような計算結果によると、 $d_c = 1.81\xi$ 以下では $x_0 = k_y = 0$ で、また、 d_c 以上で x_0 と k_y は変数を d として 0 から無限大の傾きで立ち上がって増大することがわかる。

$x_0 \neq 0$ の時、有効ポテンシャルの極小に関して $x = \pm|x_0|$ で $k_y = \pm|k_y|$ となるような等価な位置が二つあるはずであり、この二つの位置で線形 GL 方程式の固有関数は全く同じ固有値を持っていることは明らかである。これらの固有関数は図 4.9 に模式的に示されている。臨界磁場の計算においては、任意の d/ξ の値について Saint-James と de-Gennes が行ったように、どちらかの固有関数を使えばよい。けれども、磁場が薄膜の核生成磁場 H_{c3} よりわずかに小さくなると直ちに ψ が有限となり、GL 方程式全体の中での非線形項が効いてきてしまう。これは、 $\beta|\psi|^4$ 項は空間的に小さな領域内にピークを持つような波動関数 ψ を抑えるので、波動関数の縮退を解いて空間的に広がる効果を持っている。このようにして、

$$\psi = \psi_+ + \psi_- = e^{ik_y y} f(x) + e^{-ik_y y} f(-x) \quad (18)$$

$$= \cos k_y y [f(x) + f(-x)] + i \sin k_y y [f(x) - f(-x)] \quad (19)$$

のような、同じ重みを持つ二つの反対称解の線形結合が固有関数として期待される。二つの解の干渉のため、 $\cos k_y y = 0$ であればいつでも、面中央 ($x = 0$) に沿って node ができる。すなわち、その間隔は

$$\Delta y = \frac{\pi}{k_y} = \frac{\Phi_0}{2x_0 H} \approx \frac{\Phi_0}{H(d - d_c)} \quad (20)$$

²Tinkham の原論文によれば、 $c < 0$ となっている。そしてその c を用いることで上式の $H_{c||}$ を求めている。しかしながら、中央でもっとも ψ が大きくなるということが物理的に妥当であるので、 $c > 0$ が正しく、Tinkham の原論文は間違っている。

である。この近似的な等号は、もし $|x_0|$ が $d/2 - d_c/2$ で与えられるならば成り立つ。その結果、 $d > d_c$ である場合に近似的に成り立ち、そのとき表面の背後に一定の距離を置いてポテンシャルの極小があることになる。もし、式 (19) の位相を考えると、それぞれの node の周りで一周すると 2π だけ位相が変化し、これは図 4.10 に示されるように電流の渦に対応していることがわかる。このようにして、二つの本質的には一次元である解を重ね合わせることで、 $|\psi|$ の node の周りを回る電流を伴う二次元解を作ることができたのである³。

薄板が次第に厚さを増すと、二つの表面解はさらに遠く話され、渦糸間隔 Δy は小さくなっていく。数値計算によれば、それがあがる点まで達すると渦糸の作る模様はさらにもっと複雑になっていく。しかしながら、二つの表面波 ψ_{\pm} の重なりもまた小さくなっていく。やがて結果的には、二つの表面解の結合エネルギーも kT に比べて無視できるようになり、二つの別々に離れた表面解は前に取り扱われたように独立となってしまふ。

4.11 THE ABRIKOSOV VORTEX STATE AT H_{c2}

十分に厚い膜において、 H_{c3} で線形 GL 方程式に対してちょうど二つの表面解があるように、バルク試料では H_{c2} で無限個の内部解があり、それぞれは

$$\psi_k = e^{iky} f(x) = \exp(iky) \exp\left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\xi^2}\right] \quad (21)$$

のような形をしている。ここで、 k は k_y を表し、 x_k は

$$x_k = \frac{k\Phi_0}{2\pi H} \quad (22)$$

である。これは 4.8 節で得られた解が一つの特解であり、有効ポテンシャルの位置をずらした関数も依然として線形 GL 方程式の解であることから理解できる。また、これらのそれぞれは、 $x = x_k$ において Gaussian の断面を持つ。すべての ψ_k は異なった e^{iky} 因子により直交している。それぞれの解は、 H_{c2} において厳密に等しくなり、それらすべては同一の H_{c2} を与える。なぜなら、調和振動子の解における最低固有値が臨界磁場を与えるからである。4.8 節の臨界磁場の議論において x_k の位置によらないことからこのことが理解できる。臨界磁場を与える磁場のとき、 $n = 0, k_z = 0$ であるから 4.8 節の解の $e^{ik_z z}$ という因子が今回の議論には登場していないのである。

もし、ちょうど薄膜の場合と同じように、 H がほんのわずかであっても有限の大ききだけ H_{c2} より減少すると、直ちに非線形方程式の自由エネルギーを極小とする解が、試料全体をみたす解である必要が出てきて、それはまた、磁場のエネルギーや運動エネルギーの項と同様に $\beta|\psi|^4$ の項も含めて極小化するような方法で得られる解である必要があるということである。

薄膜の場合の二つの解は、自動的に y 方向の周期性を作り上げた。定性的には、vortex はランダムな配列をとるよりも結晶的な配列の方がエネルギーがより低いと期待できるので、内部の解にも周期性を課すことを考える。これは、式 (21) での k の値が単純に

$$k_n = nq \quad (23)$$

と離散的な値をとると考えることで実現することができる。また、この場合、 y には

$$\Delta y = \frac{2\pi}{q} \quad (24)$$

の周期性があることになる。この制限は、自動的に x に対しても周期性を作り上げることになる。なぜならば、式 (22) を通して Gauss 型の解が

$$x_n = \frac{k_n\Phi_0}{2\pi H} = \frac{nq\Phi_0}{2\pi H} \quad (25)$$

の位置に制限されるからである。ゆえに、もしすべての ψ_n が同じ重みを持っているのならば、 x 方向には

$$\Delta x = \frac{q\Phi_0}{2\pi H} = \frac{\Phi_0}{H\Delta y} \quad (26)$$

³もともと $e^{ik_y y}$ という因子をつけていたので、二次元解であるのははじめからだったような気がする。

の周期性があることになる。上式から、

$$H\Delta x\Delta y = \Phi_0 \quad (27)$$

であるから、この周期的な配列の単位胞それぞれが一本の量子化磁束を持つことになる。いまわれわれは $H = H_{c2}$ の場合に関してのみこれを示したが、実際には、もし、 H を B で置き換えてよいのなら、それは H_{c2} 以下でもまた正しい。 H というのは、4.8 節にあるように、外部磁場である。 B は、超伝導体内での磁束密度である。 B と H は磁化 M によって結びついている。臨界磁場においては、 $|\psi| = 0$ であるから、超伝導電流が零であり $H = B$ である。外部磁場 H が臨界磁場よりも小さくなると、超伝導電流が生じることによって $H \neq B$ となる。ただし、十分に臨界磁場に近ければ $|\psi|$ の値は小さいので $A_y = Bx$ と置くことが可能になる。もしこのように 4.8 節の H を B と置き換えることができたのなら、4.8 節の議論を同様に用いることができ、式 (27) が H_{c2} 以下でも正しいことを示すことができる。定性的に言えば、以下のように言える。臨界磁場において、超伝導体に侵入している磁束の和は試料にかかっている外部磁場に等しい。しかし、臨界磁場よりも低い磁場においては、そうではない。なぜなら、磁束が侵入し始める磁場においては、磁束が一本から入り始め、そしてだんだんと増えてくるからである。もう入りきらなほど磁束が詰まった状態が臨界磁場に相当するのである。そしてこのとき外部磁場 H と磁束密度 B は等しい。フラクソイドの量子化の議論から、二つの同等な渦糸の配列を持つ単位胞の間の境界では、対称性の理由から $J_s = 0$ である。

より一般的には、関数

$$\psi_L = \sum_n C_n \psi_n = \sum_n C_n \exp(inqy) \exp\left[-\frac{(x-x_n)^2}{2\xi^2}\right] \quad (28)$$

を考えるとよい。これは、 H_{c2} における線形 GL 方程式に対する一つの一般解であり、式の構造上、 y 方向に周期的である。それはまた、 ν に関して、 C_n が $C_{n+\nu} = C_n$ であるような n の周期的関数であるなら、 x についても周期的だろう。たとえば、もしすべての C_n が等しいのなら、 $\nu = 1$ であり、この場合 Abrikosov の四角格子が生ずる。これは以前に式 (27) を導くために定性的な議論を行った際に考えた場合に当たる。一方、 $\nu = 2$ で、また $C_1 = iC_0$ ならば、三角格子が生ずる。

H_{c2} では、式 (28) の形のあらゆる解が可能である。どれが実際に観測されるかを定めるためには、非線形項を導入し、いくらか数値的な計算をする必要がある。Abrikosov によって認められたように、さまざまな可能な解のうちどの解が相対的により好ましいかを定めるパラメータは

$$\beta_A = \frac{\langle \psi_L^4 \rangle}{\langle \psi_L^2 \rangle^2} \quad (29)$$

である。このパラメータは、明らかに ψ の規格化とは独立である。それは、もし ψ が一定であるのなら 1 の値をとり、それが次第にピークをつくり、どんどん局在化した関数になればなるほど β_A はだんだん大きくなっていく。たとえば、もし ψ が一定の値で、近似的に体積の割合 f にわたって局在しており、その他どこでも近似的にゼロであるなら $\beta_A \approx f^{-1} \gg 1$ である。

なぜこの量が関与してくるのかについての理由は、次のようにしてわかる。第一に、 ψ が外部の条件を満たすために空間的变化を強制されるが、空間的变化が大変緩やかなので自由エネルギーの中にある傾きの項と電流の項は無視しても良いものとする。この時、自由エネルギーは (4.2) 式の二つの項で近似してよい。 ψ の形とその振幅を別々に調整することを許すなら、 $\psi(\mathbf{r}) = c\chi(\mathbf{r})$ と書ける。これを (4.2) 式へ代入すると

$$\langle f_s - f_n \rangle = \alpha \langle \chi^2 \rangle c^2 + \frac{\beta}{2} \langle \chi^4 \rangle c^4 \quad (30)$$

となり、 c^2 に対して極小化すると

$$c^2 = \frac{-\alpha \langle \chi^2 \rangle}{\beta \langle \chi^4 \rangle} \quad (31)$$

となるのがわかる。これを (4.2) 式へ戻すと

$$\langle f_s - f_n \rangle = -\frac{\alpha^2 \langle \chi^2 \rangle^2}{2\beta \langle \chi^4 \rangle} = -\frac{\alpha^2}{2\beta} \beta_A^{-1} \quad (32)$$

が得られる。 χ が一定なら、 $\beta_A = 1$ で、これは通常の凝縮エネルギーである (4.4) 式に帰着する。もし χ が一定でないなら、 $\beta_A > 1$ で、 β_A が増えれば増えるほどエネルギー的にはより好ましくなくなる。試料体積の一部分 f の割合だけに広がった局在した解を極端な例として再び考えると、ここでは $\beta_A \approx f^{-1}$ であり、凝縮エネルギーは $\beta_A \approx 1$ となるような、空間全体に広がった解の時得られるエネルギーの単に f 倍にすぎないことがわかる。

この結果は、もちろん、直感的に大変納得がいき、自由エネルギーの 4 次の項を考慮に入れれば、線型方程式が空間的に広がった解であればどんな形であっても明らかに局在したいかなる解よりも好ましいことを示している。

式 (32) のもっと現実的な改良をされた式は、(4.7) 式で $|\psi|$ の傾きから生ずる項を自由エネルギーの中に含め、もっと複雑な自己矛盾の無い解を必要とする電流とベクトルポテンシャルの項を依然として含めないようにすることで導くことができる。もしこのようにした場合、すでに概略が述べられたような計算を繰り返すと、

$$\langle f_s - f_n \rangle = \left(\alpha \langle \chi^2 \rangle + \frac{\hbar^2}{2m^*} \langle |\nabla\chi|^2 \rangle \right) c^2 + \frac{\beta}{2} \langle \chi^4 \rangle c^4 \quad (33)$$

$$c^2 = \frac{-\alpha}{\beta \langle \chi^4 \rangle} \left(\langle \chi^2 \rangle - \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \langle |\nabla\chi|^2 \rangle \right) \quad (34)$$

$$(35)$$

となり、その結果、式 (32) は

$$\langle f_s - f_n \rangle = - \left(\frac{\alpha^2}{2\beta} \right) \beta_A^{-1} \left[1 - \xi^2 \frac{\langle |\nabla\chi|^2 \rangle}{\langle \chi^2 \rangle} \right]^2 \quad (36)$$

で置き換えられる。この余分な因子は二次相転移点においてゼロになるのであるが、ここでは χ が線形 GL 方程式を満たしている。このように、 β_A^{-1} は依然として非線形項の効果を極小化することに関して波動関数の有効性を測る指標であり、そして、凝縮エネルギーは二次相転移以下でなおも温度とともに二次関数的に増加することがわかる。しかしながら、その転移点は T_c (ここでは $\alpha \rightarrow 0$) から幾分低い温度にずれ、ここでは勾配が存在する中で核生成が起こっている。この温度は、式 (36) で最後の因子が消えることで、すなわち

$$\xi^2(T) = \frac{\langle \chi^2 \rangle}{\langle |\nabla\chi|^2 \rangle} \quad (37)$$

で決まる。ここではそれを証明しないが、式 (36) の定性的なこれらの特徴は、今ここで関心のある場合のような、すなわち、エネルギーの中で磁場と電流項が決定的に重要な役目を果たしているような場合でも一貫して成り立つのである。

今、式 (28) を最適化することに戻ると、式 (36) の最後の因子は同じ H_{c2} を持つ解のどんな一次結合についても同じであるので、それは β_A が最小であるような C_n の組を見出すことと等しい。数値計算によれば、Abrikosov の正方格子では $\beta_A = 1.18$ であり、一方、前に述べたような三角格子 ($iC_{2n+1} = V_{2n} = \text{const.}$) に関しては、 β_A となる。これが小差である事を考えれば、数値的な誤差のために Abrikosov が最初に正方配列がより安定であることを導いてしまったことが理解される。後に、Kleiner、Roth、Autler による仕事によりこの誤りが修正され、彼らは三角格子が事実上すべての可能な周期的解の内でもっとも好ましい β_A の値を持つことを示した。

この結論は、各々の渦糸が他の渦糸から六方配列によって囲まれる三角格子が「最密配列」であるという事実から得られる単純な議論の結果と一致することは興味深い (図 4.11) ⁴。この配列では、最隣接間隔は

$$a_\Delta = \left(\frac{4}{3} \right)^{1/4} \left(\frac{\Phi_0}{B} \right)^{1/2} = 1.075 \left(\frac{\Phi_0}{B} \right)^{1/2} \quad (38)$$

であり⁵、一方、四角配列における四隣接については、

$$a = \left(\frac{\Phi_0}{B} \right)^{1/2} \quad (39)$$

⁴ここで Tinkham の言う「最密配列」とは、ある円盤を一定の面積につめるときに三角形につめるのが一番詰まるという意味での最密である。いま密度は Φ_0/B で一定であるから、磁束が最密であるということではない。

⁵三角形の領域を考えると、そこには磁束が $(\Phi_0/B)/2$ 本入っている。そして、三角形の面積は $a_\Delta^2 \sqrt{3}/4$ である。

である。このように、ある一つの与えられた磁束密度に対して $a_{\Delta} > a$ である。渦糸間の互いの反発を考慮すると、最隣接同士がもっとも離れた構造が好ましいのは当然のこととして納得がいく。

一般に、実験によって三角配列が確認されているが、しかしある種の物質では結晶構造の対称性から生ずる影響が構造の無い媒体での小さな理論的エネルギー差を越えてしまうようであり、正方格子配列や斜方格子配列さえも観測されることがある。また、物質内欠陥により規則正しい配列が完全に壊れるほどたくさんの不均一性が導入されると、渦糸は結晶配列よりはむしろガラス的配列になることが観測されている。

渦糸がどのような配列をするかといった詳細な性質はほとんどの応用に関して重要でないので、我々は Abrikosov の解の詳細に深入りしない。次章ではそれよりむしろ、我々は渦糸に関する主な結果を概説し、渦糸の配列の単位胞が近似的に同じ面積の円とする単純化を行ってその物理的結果を主に取り上げて議論する。この単純化は、固体における電子エネルギーバンドの計算で、実際の Wigner-Seitz 胞を同じ体積の球と置き換える単純化に似ている。 β_A の値などについての典型的な数値計算の結果によれば円形と六方の単位胞の間での違いは六方と正方単位胞の間の違いと大体同じほどであり、すなわち、それは数パーセントほどである。もちろん H_{c2} それ自体は、線形 GL 方程式のどのような解をとっても無限大の媒質の内部では厳密に同じはずである。