強磁性体で両側を挟まれた超伝導薄膜*

永井佑紀

平成 17 年 8 月 15 日

強磁性体で両側を挟まれた厚さ d の一様な超伝導薄膜を考える。

1. 膜面に平行な磁場 H がかかった場合の GL 方程式を書け
2. $H=0$ のとき、波動関数の境界条件 $\psi(\pm d/2)=0$ のもとに線形化された GL 方程式を解くことによって、この薄膜の転移温度 T_c（バルクの転移温度 T_{c0} よりも低くなる）を求めよ。
3. 平行磁場 H のもとで上部臨界磁場を求めよ。その温度依存性を明示的に表せ。
（磁場による「調和ポテンシャルの項」のエネルギーへの寄与をその平均値で近似する）

という問題を解くことにする。
ここでは Gauss 単位系を用いる。

1 GL 方程式を書く

1.1 GL 方程式

超伝導体の自由エネルギーを

$$F - F_n = \int d\boldsymbol{r} \left[\alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*}\left| \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e^*}{c}\boldsymbol{A} \right)\psi \right|^2 + \frac{(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})^2}{8\pi} \right] \tag{1}$$

と置けば、GL 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{ie^*}{\hbar c}\boldsymbol{A} \right)^2 \psi = -\alpha\psi - \beta|\psi|^2\psi \tag{2}$$

となる。$\boldsymbol{H} \| z$ と仮定し、薄膜は $-\frac{1}{2}d < x < \frac{1}{2}d$ の体積を占めるものとする。このときベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = (0, Hx, 0) \tag{3}$$

とおける。これを GL 方程式に代入すると

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right)\psi + \frac{|e|^2H^2}{2m^*c^2}x^2\psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 \tag{4}$$

となる。$\omega_c = |e^*|H/m^*c$ とし、薄膜は z、y 方向に無限に広いとすれば

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m^*}{2}\omega_c^2 x^2\psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 \tag{5}$$

となる。

* このノートは家先生の出されたレポート課題の解答をまとめなおしたものである

2 $H = 0$ のとき

2.1 無次元化

式 (5) を無次元化する。磁場が零で秩序パラメータが空間によらないときの解 $|\psi_\infty|^2 = -\alpha/\beta$ を用いて、$\psi(x) = f(x)\psi_\infty$ とおくと、式 (5) は

$$\psi_\infty\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{m^*}{2}\omega_c^2x^2f + \alpha f - \alpha|f|^2f\right) = 0 \tag{6}$$

となり、さらに $\psi_\infty \neq 0$ $(T < T_c)$、$\xi^2 = \hbar/2m^*|\alpha|$ と、f を実数としてもよいことを用いて書き直せば

$$-\xi^2\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{m^*}{2|\alpha|}\omega_c^2x^2f - f + f^3 = 0 \tag{7}$$

となる。

2.2 線形 GL 方程式

f の三次の項を落とすことができれば、方程式は線形微分方程式になり解くのが容易になる。そのための条件は、$f \ll 1$ である。条件を満たしそうなのは、$\psi \to 0$ となる上部臨界磁場近傍と臨界温度近傍であろう。

超伝導体は上部臨界磁場を越えると、$\psi = 0$ となる。$\psi = f\psi_\infty$ であり、ψ_∞ は磁場に拠らない定数なので $\psi \to 0$ のとき $f \to 0$ となる。したがって、$f \ll 1$ の領域が存在し、上部臨界磁場近傍で

$$-\xi^2\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{m^*}{2\alpha}\omega_c^2x^2f = f \tag{8}$$

という線形 GL 方程式を用いてもよいということになる。

臨界温度において $\psi \to 0$ となる。しかし $\psi_\infty \to 0$ となるので $f \ll 1$ である領域が存在するとは限らない。線形 GL 方程式を適用してよいかどうかを確かめるには、線形 GL 方程式が成り立つとして得られた f が臨界温度近傍で $f \ll 1$ を満たしているか確かめればよい。あるいは、$f(T) \ll \psi_\infty$ であることを確かめればよい。

2.3 $H = 0$ のときの線形 GL 方程式の妥当性

磁場がないときの線形 GL 方程式を解き、その解が $f \ll 1$ であるかどうかを検証する。

線形 GL 方程式は

$$-\xi^2\frac{d^2f}{dx^2} = f \tag{9}$$

とかける。この方程式の一般解は

$$C\cos(x/\xi) + D\sin(x/\xi) \tag{10}$$

である。$T < T_c$ においては薄膜は超伝導状態である必要があるので、$x = 0$ で f の正負が変化してしまう sin 的解は存在しないということがわかり、$D = 0$ である。また、境界条件 $\psi(\pm d/2) = 0$ を満たすためには

$$\frac{d}{2\xi} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \tag{11}$$

となり、解は

$$f = C\cos\left(\frac{2}{d}(n + 1/2)\pi x\right) \tag{12}$$

となる。薄膜は超伝導状態なので $-d/2 < x < d/2$ で $f > 0$ である必要があるから $n = 0$ である。よって、

$$f = C\cos\left(\frac{\pi}{d}x\right) \tag{13}$$

となる。

係数の決定

係数の決定を行わなければならない。以下のように係数の決定を行ったのだが、間違っていると思われる。

$d \to \infty$ のとき、$x = 0$ での値は ψ_∞ に一致し、$\xi \to \infty$ のとき境界条件から $f \to 0$ になる必要があるので、$C = e^{-\xi/d}$ でなければならないことがわかり、結局

$$f = e^{-\xi/d} \cos\left(\frac{\pi}{d}x\right) \tag{14}$$

が解となる。上の係数の決定法は、$d \to \infty$ のとき線形 GL 方程式の解が線形ではない GL 方程式の解と一致するということを要請している。したがって、自明ではなく、正しいかどうかも不明である。申し訳ないのだが、以後もこの方法で係数を決定して議論している。非線形 GL 方程式を解くことで決着をつけたいと思っている。

転移温度変化

$\xi \gg d$ のときのみ、f は $f \ll 1$ を満たしている。したがって、$H = 0$ のときには、$\xi \gg d$ が線形 GL 方程式の適用可能な領域[1]である、結局、

$$|\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} e^{-2\xi/d} \cos^2\left(\frac{\pi}{d}x\right) \tag{15}$$

である。

$x = 0$ における $|\psi(x=0)|^2$ の温度依存性は $t = T - T_c$ として

$$|\psi(x=0)|^2 = -\frac{\alpha' t}{\beta} \exp\left(-\frac{\hbar^2}{m^* d}\frac{1}{\alpha' t}\right) \tag{16}$$

となる。ここで、$\alpha = \alpha'(T - T_c)$ を用いた。

このようなやりかたでは、臨界温度に向かっていくときの振る舞いはわかっても、臨界温度自体がシフトするという結果はでない。厳密に行うにはやはり非線形微分方程式を解くべきなのだろう。$H = 0$ であれば、ぎりぎり解析的に解けると思われる。機会をみて計算したいと思っている。

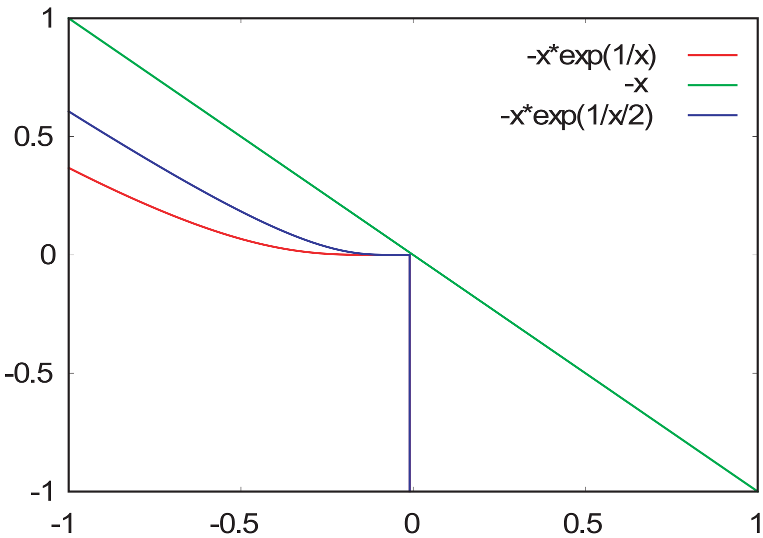

図 1: $|\psi|^2$ の温度依存性の概形。赤：薄膜、青：赤より二倍厚い薄膜、緑：バルク。薄膜の場合、ある程度臨界温度手前で 0 に限りなく近くなっているのが見て取れる

[1] このように書いたが、実際は係数の決定が怪しいので、実際は磁場零では線形 GL 方程式は使えないと結論付けるしかない。

3　平行磁場のもとでの上部臨界磁場の導出

3.1　線形 GL 方程式

磁場が大きいときには線形 GL 方程式を用いることができる。式 (8) を

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2 f}{dx^2} = \left(-\alpha - \frac{m^*}{2}\omega_c^2 x^2\right) f \tag{17}$$

のように書き直す。磁場のエネルギーの平均は

$$\frac{1}{2}\int_{-d/2}^{d/2} \frac{m^*}{2}\omega_c^2 x^2 dx = \frac{m^*}{24}\omega_c^2 d^2 \tag{18}$$

であるから、磁場のエネルギーを平均値とする近似を行うと、式 (17) は

$$\xi_H^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = -f \tag{19}$$

とかくことができる。ここで、$\xi_H^{-2} = \frac{2m^*}{\hbar^2}(-\alpha - \frac{m^*}{24}\omega_c^2 d^2)$ とおいた。よって、解は

$$f = C\cos\left(\frac{\pi}{d}x\right) \tag{20}$$

となる。ここで、$\xi_H^{-1} = \pi/d$ である。上部臨界磁場に到達すると（$H \to H_c$)、$\xi \to \infty$ になり、超伝導状態から常伝導状態に移行する。したがって、

$$\frac{2m^*}{\hbar^2}(-\alpha - \frac{m^*}{24}\omega_c^2 d^2) = 0 \tag{21}$$

を満たす磁場が上部臨界磁場である。$\alpha = \alpha'(T - T_c)$ であるので、

$$H_c = \left(\frac{24m^* c^2}{|e|^2 d^2}\alpha'(T_c - T)\right)^{1/2} \tag{22}$$

となる。

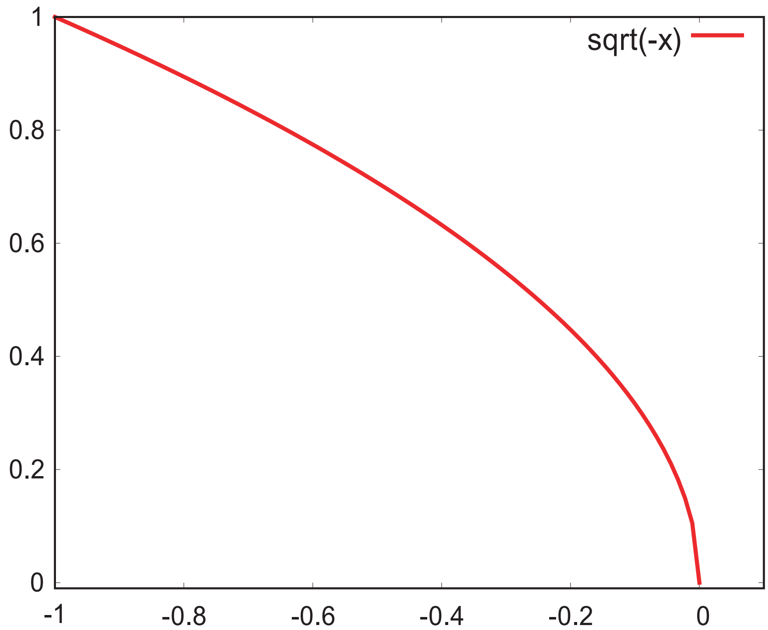

図 2: 上部臨界磁場の温度依存性の概形

参考文献

アブリコソフ、「金属物理学の基礎」(吉岡書店 1995)

Michael Tinkham,"Introduction to Superconductivity" 2nd ed. (McGraw-Hill, 1996)

伊達宗行監修　「大学院物性物理２：強相関電子系」（講談社サイエンティフィク）

P. G. De Gennes."Superconductivity of Metals and Alloys"

中嶋貞雄　「超伝導入門」（培風館）