超伝導体の渦糸、KTB 転移*

永井佑紀

平成 17 年 7 月 26 日

London 方程式で表される系に加えて、渦糸位置に δ 関数的な磁場が存在する、という渦糸の簡単なモデルを使って、渦糸同士の相互作用の表式を導く。その結果から、渦糸系では近似的に KTB 転移が生じることがわかる。その転移温度を求める。また、この近似がどのような場合に破綻するかを述べる。

Gauss 単位系を用いる。

London 方程式

$\lambda \gg \xi$ のとき、渦糸中心から ξ 以上離れた場所では $|\psi_(\boldsymbol{r})| = |\psi_\infty|$ となる。秩序パラメータが空間によらず一様なとき、London 方程式が成り立つ。渦糸中心から半径 ξ までを渦糸のコアと呼ぶことにすると、London 方程式はコアの外で成り立ち、

$$\frac{4\pi\lambda^2}{c}\mathrm{rot}\boldsymbol{J}_\mathrm{s} + \boldsymbol{h} = 0 \tag{1}$$

となる。ここで、近似として、$\xi \to 0$ とする。つまり、原点以外において London 方程式が成り立つとする。そのとき、原点に磁束 Φ_0 が存在することを考慮すると、

$$\frac{4\pi\lambda^2}{c}\mathrm{rot}\boldsymbol{J}_\mathrm{s} + \boldsymbol{h} = \hat{\boldsymbol{z}}\Phi_0\delta_2(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

となる。このとき $\hat{\boldsymbol{z}}$ は渦糸に沿った方向の単位ベクトルであり、$\delta_2(\boldsymbol{r})$ は二次元 δ 関数である。上式と Maxwell 方程式：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{h} = \frac{4\pi}{\mathrm{c}}\boldsymbol{j} \tag{3}$$

を用いて変形すると

$$\nabla^2\boldsymbol{h} - \frac{\boldsymbol{h}}{\lambda^2} = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2}\hat{\boldsymbol{z}}\delta_2(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

という微分方程式を得る。このような微分方程式の解は、ゼロ次の変形 Bessel 関数 $K_0(r)$ を用いて

$$h(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \tag{5}$$

と書けることがわかっている。また、この関数は $r \to 0$ において log 発散するが、London 方程式が適用できるのは $r > \xi$ なので、$r \sim \xi$ でカットオフすることができる。これを踏まえて、極限における磁場の振る舞いを初等関数で表すと

$$h(r) \quad \to \quad \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\left(\frac{\pi\lambda}{2r}\right)e^{-r/\lambda} \qquad r \to \infty \tag{6}$$

$$h(r) \quad \approx \quad \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\left[\ln\frac{\lambda}{r} + 0.12\right] \qquad \xi \ll r \ll \lambda \tag{7}$$

となる。

---

*このノートは勝本先生の出されたレポート課題の解答をまとめなおしたものである

渦糸のエネルギー

一個の渦糸を生成するために必要な単位長さあたりのエネルギーを ε とする。渦糸の周りには遮蔽電流が流れていることに注意すると、

$$\varepsilon = \int dr \left(\frac{1}{2} n_s m v_s^2 + \frac{1}{8\pi} \boldsymbol{h}^2 \right) \tag{8}$$

となる。ここで n_s は遮蔽電流に寄与している電子密度、m は電子の質量、v_s は遮蔽電流に寄与している電子の速度である。また、$j = e v_s n_s = (c/4\pi)\mathrm{rot}\boldsymbol{h}$ であり、$\lambda^2 = mc^2/4\pi n_s e^2$ であることを用いると

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{8\pi} \int dr \left(\lambda^2 (\mathrm{rot}\boldsymbol{h})^2 + \boldsymbol{h}^2 \right) \\ &= \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint_{|r|=\xi} ds \boldsymbol{h} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{h} \end{aligned} \tag{9}$$

となる。ここで、部分積分と London 方程式 $\nabla^2 \boldsymbol{h} = (1/\lambda^2)\boldsymbol{h}$ を用いた。上式は半径 ξ の円筒形表面が積分範囲である。円筒形表面上において、$\xi \ll \lambda$、式 (7) を用いると

$$h \approx \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi} \tag{10}$$

$$|\mathrm{rot}\boldsymbol{h}| = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2\xi} \tag{11}$$

となるので、結局、

$$\varepsilon = 2\pi\xi \frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2\xi} \ln \frac{\lambda}{\xi} = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \frac{\lambda}{\xi} \tag{12}$$

となる。

渦糸の相互作用

外場第二臨界磁場に近くない限り、渦糸同士の間隔は ξ より大きい。したがって、磁場は、各渦糸が単独に存在するときの磁場を単に重ね合わせたもの：

$$h_z(r) = \sum_n h_n(r) \tag{13}$$

$$h_n(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0 \left(\frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_n|}{\lambda} \right) \tag{14}$$

である。h_z はたとえば $z=0$ の平面上での磁場である。複数の渦糸の存在による単位長さあたりの自由エネルギーについて、やはり式 (9) が成り立つ。まず、渦糸の存在によるエネルギー上昇 $\Delta\varepsilon$ は

$$\Delta\varepsilon = \frac{\lambda^2}{8\pi} \sum \sum\nolimits_{p,q} \oint_{|r_n|=\xi_n} ds_n \boldsymbol{h}_p \times \mathrm{rot}\boldsymbol{h}_\mathrm{q} \tag{15}$$

と書ける。$p=n$、$q=n$ の項からの寄与はもちろん式（12) を与える。ここで $h(r) \propto \ln(\lambda/r)$、$|\mathrm{rot}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})| \propto 1/\mathrm{r}$ であるから、周回積分後は $2\pi r h(r) \propto r\ln(\lambda/r)$、$2\pi r|\mathrm{rot}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})| = \mathrm{const.}$ となる。つまり、$\xi \to 0$ の極限をとったとき、$p \neq n$、$q = n$ の項は

$$\begin{aligned} \lim_{\xi\to 0} \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint_{|r_n|=\xi_n} ds_n \boldsymbol{h}_p \times \mathrm{rot}\boldsymbol{h}_\mathrm{q} &= \lim_{\xi\to 0} \frac{\lambda^2}{8\pi} \boldsymbol{h}_p(|\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{\xi}|) 2\pi \frac{\Phi_0}{\lambda^2} \\ = \lim_{\xi\to 0} \frac{\Phi_0}{8\pi} \boldsymbol{h}_p(|\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{\xi}|) 2\pi &= \frac{\Phi_0^2}{16\pi^2\lambda^2} K_0 \left(\frac{|\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_n|}{\lambda} \right) \end{aligned} \tag{16}$$

となる。また、$p=n$、$q \neq n$ の項や、p も q も n でない項は $\xi \to 0$ の極限をとったときには無視することができる。よって、自由エネルギーのうち、渦糸の相対位置に関係する部分は、z 軸方向の単位長さあたり

$$\varepsilon_\mathrm{int} = \frac{1}{2} \sum \sum\nolimits_{n \neq p} \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda^2} K_0 \left(\frac{|\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_n|}{\lambda} \right) \tag{17}$$

となる。これが渦糸の間の相互作用エネルギーである。$K_0 > 0$ より渦糸間に反発力が生じる。

KTB 転移

KTB 転移は、$\ln r$ に比例する相互作用があるときに生じることがわかっている。そのことから、式 (7) より、渦糸間の距離が λ より小さいときのみ KTB 転移が生じることがわかり、そのときのみ現実の系において KTB 転移の議論を適用して差し支えないということがわかる。十分薄い超伝導体薄膜においてはこの条件が満たされ、KTB 転移の観測が可能になる。

転移温度を求める。$\psi = |\psi| e^{i\varphi}$ と書く。空間変化が存在しないとすると、$|\psi|^2 \equiv |\psi_\infty|^2$ であるとする。ψ のゆらぎには、振幅 $|\psi|$ が変化するモードと、位相 φ が変化するモードがある。前者のもつエネルギーは後者のそれに比べて高いので無視すると、結局

$$U = \int d\boldsymbol{r} \frac{\hbar^2}{4m} |\psi_\infty|^2 (\nabla\varphi)^2 \equiv \frac{K}{2} \int d\boldsymbol{r} (\nabla\varphi)^2 = \frac{\rho_s}{2} \int d\boldsymbol{r} v_s^2 \tag{18}$$

となる。ここで、

$$K = \frac{\hbar^2 |\psi_\infty|^2}{2m} = \left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2 \rho_s \tag{19}$$

であり、$\rho_s = 2m|\psi_\infty|^2$ である。これより、渦度 1 の自由な渦糸のエネルギーは系の大きさを R として

$$U_1 = \pi K \ln \frac{R}{\xi} \tag{20}$$

となる。ここではコアのエネルギーは無視した。また、エントロピーは、自由渦の取りうる位置の場合の数が $(R/\xi)^2$ であることから求められ、結局自由エネルギーは

$$F = U_1 - TS = \pi K \ln \frac{R}{\xi} - 2k_B T \ln \frac{R}{\xi} = (\pi K - 2k_B T) \ln \frac{R}{\xi} \tag{21}$$

となる。$T = \pi K / 2k_B \equiv T_{\mathrm{KTB}}$ を境に、$R \to \infty$ で $F \to \pm\infty$ となる。これは、$T > T_{\mathrm{KTB}}$ では孤立した渦が安定であるが、$T < T_{\mathrm{KTB}}$ ではそれが不安定となることを意味する。つまり、T_{KTB} は転移点である。

参考文献

アブリコソフ、「金属物理学の基礎」(吉岡書店 1995)
Michael Tinkham,"Introduction to Superconductivity" 2nd ed. (McGraw-Hill, 1996)
伊達宗行監修　「大学院物性物理２：強相関電子系」（講談社サイエンティフィク）
P. G. De Gennes."Superconductivity of Metals and Alloys"
中嶋貞雄　「超伝導入門」（培風館）