一般的な相互作用の場合のギャップ方程式とその線形化

永井佑紀

平成 28 年 7 月 8 日

一般的な相互作用の場合のギャップ方程式を導出し、その線形化された方程式も導出する。その際、二次形式で書かれたハミルトニアンの Green 関数は一粒子ハミルトニアンの逆行列で書けることも示す。

1 ハミルトニアン

ハミルトニアンとしては、空間が離散化されている強束縛模型を用いる。連続模型を用いても同じ議論ができるはずである。ハミルトニアンの形を

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} U_{ijkl} c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l \tag{1}$$

とする。ここで、ハミルトニアンはエルミートでなければならないので、

$$\mathcal{H}^\dagger = \sum_{ij} H_{ij}^* c_j^\dagger c_i + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} U_{ijkl}^* c_l^\dagger c_k^\dagger c_j c_i \tag{2}$$

$$= \sum_{ij} H_{ji}^* c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} U_{lkji}^* c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l = \mathcal{H} \tag{3}$$

より、

$$H_{ji}^* = H_{ij} \tag{4}$$

$$U_{lkji}^* = U_{ijkl} \tag{5}$$

でなければならない。また、インデックス i は 1 から N までを取ることとする。

2 ギャップ方程式の導出

2.1 ギャップ方程式

次に、ギャップ方程式を導出する。スタンダードな方法として

$$c_i^\dagger c_j^\dagger = \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle - \left(\langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle - c_i^\dagger c_j^\dagger \right) \tag{6}$$

$$c_k c_l = \langle c_k c_l \rangle - \left(\langle c_k c_l \rangle - c_k c_l \right) \tag{7}$$

という恒等変形を用いる。これをハミルトニアンに代入し、第二項の二乗を無視すると、

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2}\sum_{ijkl} U_{ijkl} \left[\langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle - \left(\langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle - c_i^\dagger c_j^\dagger \right) \right] \left[\langle c_k c_l \rangle - (\langle c_k c_l \rangle - c_k c_l) \right] \tag{8}$$

$$\sim \sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2}\sum_{ijkl} U_{ijkl} \left[\langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle c_k c_l + \langle c_k c_l \rangle c_i^\dagger c_j^\dagger - \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle \langle c_k c_l \rangle \right] \tag{9}$$

$$= \sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2}\sum_{kl} \left(\sum_{ij} U_{ijkl} \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle \right) c_k c_l + \frac{1}{2}\sum_{ij} \left(\sum_{kl} U_{ijkl} \langle c_k c_l \rangle \right) c_i^\dagger c_j^\dagger - \frac{1}{2}\sum_{ijkl} U_{ijkl} \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle \langle c_k c_l \rangle \tag{10}$$

$$= \sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2}\sum_{ij} \left(\sum_{kl} U_{lkij} \langle c_l^\dagger c_k^\dagger \rangle \right) c_i c_j + \frac{1}{2}\sum_{ij} \left(\sum_{kl} U_{ijkl} \langle c_k c_l \rangle \right) c_i^\dagger c_j^\dagger - \frac{1}{2}\sum_{ijkl} U_{ijkl} \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle \langle c_k c_l \rangle \tag{11}$$

となるので、

$$\Delta_{ij} \equiv \sum_{kl} U_{ijkl} \langle c_k c_l \rangle \tag{12}$$

を導入すると、

$$\Delta_{ji}^* = \sum_{kl} U_{jikl}^* \langle c_l^\dagger c_k^\dagger \rangle \tag{13}$$

$$= \sum_{kl} U_{lkij} \langle c_l^\dagger c_k^\dagger \rangle \tag{14}$$

を使うことで、Bogoliubov-de Gennes(BdG) ハミルトニアン：

$$\mathcal{H}_{\rm BdG} = \sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2}\sum_{ij} \Delta_{ji}^* c_i c_j + \frac{1}{2}\sum_{ij} \Delta_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger - \frac{1}{2}\sum_{ijkl} U_{ijkl} \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle \langle c_k c_l \rangle \tag{15}$$

が得られる。そして、式 (12) がギャップ方程式である。

2.2 BdG 方程式

このBdG ハミルトニアンは、少し書き直すことで見通しを良くすることができる。まず、一体部分を二つに分けて、

$$\sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2}\sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2}\sum_{ij} H_{ij} \left(\delta_{ij} - c_j c_i^\dagger \right) \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j - \frac{1}{2}\sum_{ij} H_{ji} c_i c_j^\dagger + \frac{1}{2}\sum_{i} H_{ii} \tag{18}$$

とし、$H_{ji}^* = H_{ij}$ から $H_{ji} = H_{ij}^*$ を用いて、

$$\sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j - \frac{1}{2}\sum_{ij} H_{ij}^* c_i c_j^\dagger + \frac{1}{2}\sum_{i} H_{ii} \tag{19}$$

と書く。この項は、

$$\sum_{ij} H_{ij} c_i^\dagger c_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} \begin{pmatrix} c_i^\dagger & c_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{ij} & 0 \\ 0 & -H_{ij}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ c_j^\dagger \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sum_{i} H_{ii} \tag{20}$$

と書き直すことができる。よって、BdG ハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}=\frac{1}{2}\sum_{ij}\begin{pmatrix} c_i^\dagger & c_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_{ij} & \Delta_{ij} \\ \Delta_{ji}^* & -H_{ij}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_j \\ c_j^\dagger \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\sum_i H_{ii}-\frac{1}{2}\sum_{ijkl}U_{ijkl}\langle c_i^\dagger c_j^\dagger\rangle\langle c_k c_l\rangle \tag{21}$$

となる。さらに、$\boldsymbol{\psi}^\dagger\equiv(\boldsymbol{c}^\dagger,\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\equiv(c_1,\cdots,c_N)$ を用いれば、

$$\mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}^\dagger\begin{pmatrix} \hat{H} & \hat{\Delta} \\ \hat{\Delta}^\dagger & -\hat{H}^* \end{pmatrix}\boldsymbol{\psi}+\frac{1}{2}\sum_i H_{ii}-\frac{1}{2}\sum_{ijkl}U_{ijkl}\langle c_i^\dagger c_j^\dagger\rangle\langle c_k c_l\rangle \tag{22}$$

となり、第二項と第三項は定数項なのでエネルギーの原点を変える効果しかないので無視できて

$$\mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}^\dagger\check{H}_{\mathrm{BdG}}\boldsymbol{\psi} \tag{23}$$

$$\check{H}_{\mathrm{BdG}}\equiv\begin{pmatrix} \hat{H} & \hat{\Delta} \\ \hat{\Delta}^\dagger & -\hat{H}^* \end{pmatrix} \tag{24}$$

が得られる。このハミルトニアンは、$2N$ 個の自由粒子 ψ_i のハミルトニアンと見なすことができるので、$\check{H}_{\mathrm{BdG}}$ を対角化するユニタリー行列

$$\check{P}\check{H}_{\mathrm{BdG}}\check{P}^\dagger=\mathrm{diag}\left(E_1,\cdots,E_{2N}\right) \tag{25}$$

を用いて、

$$\mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}^\dagger\check{P}^\dagger\check{P}\check{H}_{\mathrm{BdG}}\check{P}^\dagger\check{P}\boldsymbol{\psi} \tag{26}$$

$$=\sum_i E_i\gamma_i^\dagger\gamma_i \tag{27}$$

と対角化できる。ここで、新しい生成演算子 $\gamma_i^\dagger$ は、$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}=(\gamma_1,\cdots,\gamma_{2N})$ を用いて

$$\boldsymbol{\gamma}\equiv\check{P}\boldsymbol{\psi} \tag{28}$$

と定義される。$\gamma_i^\dagger$ で生成される粒子は自由粒子なので、基底状態のエネルギーは負のエネルギー E_i をすべてを足したものであり、

$$E=\sum_{i,E_i<0}E_i \tag{29}$$

となる。基底状態は、$\gamma_i^\dagger$ で生成される $E_i<0$ のエネルギーを持つ自由粒子をエネルギーの低い方から順番に詰めていった状態であり、

$$|g\rangle=\prod_{i,E_i<0}\gamma_i^\dagger|0\rangle \tag{30}$$

である。

よって、ハミルトニアンを対角化し基底エネルギーや基底状態を求めるには、

$$\check{H}_{\mathrm{BdG}}\boldsymbol{\Phi}_i=E_i\boldsymbol{\Phi}_i \tag{31}$$

という固有値問題を解けば良い。この固有値方程式を BdG 方程式と呼ぶ。

3 Green 関数

この節では、二次形式で表されるハミルトニアンを持つ虚時間グリーン関数の表式を導出し、松原振動数表示のグリーン関数が一粒子ハミルトニアンの逆行列で書けることを示す。

3.1　虚時間表示と二次形式

虚時間温度 Green 関数を

$$\check{G}(\tau) = -\langle T_\tau \boldsymbol{\psi}(\tau) \boldsymbol{\psi}^\dagger \rangle \tag{32}$$

と定義する。T_τ は虚時間に関する T 積であり、$\langle T_\tau A(\tau) B \rangle \equiv \theta(\tau)\langle A(\tau)B\rangle - \theta(-\tau)\langle BA(\tau)\rangle$ である。この Green 関数を行列表示すると

$$\check{G}_{ij}(\tau) = -\langle T_\tau \psi_i(\tau) \psi_j^\dagger \rangle \tag{33}$$

である。ここで、$O(\tau) = e^{\tau \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}} O e^{-\tau \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}}$ と定義する。演算子の指数関数の定義は

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{34}$$

である。一般に、ハミルトニアンが二次形式：

$$\mathcal{H} = \sum_i E_i \gamma_i^\dagger \gamma_i \tag{35}$$

で書ける時、虚時間の生成消滅演算子がより簡単に書けることを示す。まず、$\boldsymbol{\psi}$ の各成分は

$$\psi_i = \sum_k P_{ki}^* \gamma_k \tag{36}$$

と書けるので、$\psi_i(\tau)$ は

$$\psi_i(\tau) = e^{\tau \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}} \psi_i e^{-\tau \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}} \tag{37}$$

$$= \sum_k P_{ki}^* e^{\tau \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}} \gamma_k e^{-\tau \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}} \tag{38}$$

となる。ここで、

$$\mathcal{H}_{\mathrm{BdG}} \gamma_k = \sum_j E_j \gamma_j^\dagger \gamma_j \gamma_k \tag{39}$$

$$= -\sum_j E_j \gamma_j^\dagger \gamma_k \gamma_j \tag{40}$$

$$= -\sum_j E_j (\delta_{jk} - \gamma_k \gamma_j^\dagger) \gamma_j \tag{41}$$

$$= (-E_k + \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}) \gamma_k \tag{42}$$

なので、

$$e^{\tau \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}} \gamma_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\tau \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}})^n \gamma_k \tag{43}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \gamma_k (\tau(-E_k + \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}})^n \tag{44}$$

$$= \gamma_k e^{\tau(-E_k + \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}})} \tag{45}$$

と変形できる。よって、

$$\psi_i(\tau) = \sum_k P_{ki}^* \gamma_k e^{\tau(-E_k + \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}})} e^{-\tau \mathcal{H}_{\mathrm{BdG}}} \tag{46}$$

$$= \sum_k P_{ki}^* \gamma_k e^{-\tau E_k} \tag{47}$$

となり、指数関数の肩に演算子がなくなる。

よって、式 (33) は、

$$\check{G}_{ij}(\tau) = -\langle T_\tau \sum_k P^*_{ki}\gamma_k(\tau)\sum_l \gamma_l^\dagger P_{lj}\rangle \tag{48}$$

$$= -\sum_{kl} P^*_{ki}P_{lj}\langle T_\tau e^{-\tau E_k}\gamma_k\gamma_l^\dagger\rangle \tag{49}$$

$$= -\sum_{kl} P^*_{ki}P_{lj}\left[\theta(\tau)e^{-\tau E_k}\langle\gamma_k\gamma_l^\dagger\rangle - \theta(-\tau)e^{-\tau E_k}\langle\gamma_l^\dagger\gamma_k\rangle\right] \tag{50}$$

となる。ここで、ハミルトニアンが式 (35) のように二次形式でかけているのであれば、

$$\langle\gamma_l^\dagger\gamma_k\rangle = \delta_{lk}n(E_k) \tag{51}$$

と期待値はフェルミ分布関数:

$$n(x) = \frac{1}{e^{\beta x}+1} \tag{52}$$

で書ける。よって、

$$\check{G}_{ij}(\tau) = -\sum_k P^*_{ki}P_{kj}\left[\theta(\tau)e^{-\tau E_k}(1-n(E_k)) - \theta(-\tau)e^{-\tau E_k}n(E_k)\right] \tag{53}$$

が得られる。

3.2 松原振動数表示

温度 Green 関数のフーリエ変換は

$$G_{ij}(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}G_{ij}(\tau) \tag{54}$$

である。ここで、$\omega_n = \pi T(2n+1)$,$(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ はフェルミオンの松原振動数である。この表式に式 (53) を代入すると、

$$G_{ij}(i\omega_n) = -\sum_k P^*_{ki}P_{kj}(1-n(E_k))\int_0^\beta d\tau e^{(i\omega_n - E_k)\tau} \tag{55}$$

となり、積分を実行すると、

$$G_{ij}(i\omega_n) = -\sum_k P^*_{ki}P_{kj}(1-n(E_k))\frac{1}{i\omega_n - E_k}\left[e^{(i\omega_n-E_k)\tau}\right]_0^\beta \tag{56}$$

$$= -\sum_k P^*_{ki}P_{kj}(1-n(E_k))\frac{1}{i\omega_n - E_k}\left(-e^{-E_k\beta}-1\right) \tag{57}$$

となる。ここで、

$$1-n(E_k) = 1-\frac{1}{1+e^{\beta E_k}} \tag{58}$$

$$= \frac{e^{\beta E_k}}{1+e^{\beta E_k}} \tag{59}$$

$$= \frac{1}{e^{-\beta E_k}+1} \tag{60}$$

を用いると、

$$G_{ij}(i\omega_n) = \sum_k P^*_{ki}P_{kj}\frac{1}{i\omega_n - E_k} \tag{61}$$

が得られる。ここで、$\check{H}_{\rm BdG}$ を用いた逆行列：

$$[z-\check{H}_{\rm BdG}]^{-1} = [z-\check{P}^{\dagger}{\rm diag}\,(E_1,\cdots,E_{2N})\check{P}]^{-1} \tag{62}$$
$$= \check{P}^{\dagger}[z-{\rm diag}\,(E_1,\cdots,E_{2N})]^{-1}\check{P} \tag{63}$$

を導入して、その行列要素を見ると、

$$\left[[z-\check{H}_{\rm BdG}]^{-1}\right]_{ij} = \sum_k P^*_{ki}P_{kj}\frac{1}{z-E_k} \tag{64}$$

となり、Green 関数とそっくりになる。よって、松原振動数表示の Green 関数の行列表示は、

$$\check{G}(i\omega_n) = \left[i\omega_n - \check{H}_{\rm BdG}\right]^{-1} \tag{65}$$

が得られる。

なお、この行列表示を変形すると、

$$\left[i\omega_n - \check{H}_{\rm BdG}\right]\check{G}(i\omega_n) = \check{1} \tag{66}$$

となり、これは Dyson 方程式の超伝導版である Gor'kov 方程式になっている。

$$\check{G}(z) \equiv \left[z - \check{H}_{\rm BdG}\right]^{-1} \tag{67}$$

と定義する。この式を変形すると

$$\left[z - \check{H}_{\rm BdG}\right]\check{G}(z) = \check{1} \tag{68}$$

となり、これは Dyson 方程式の超伝導版である Gor'kov 方程式になっている。ここで、Green 関数を

$$\check{G}(z) \equiv \begin{pmatrix} \hat{G}(z) & \hat{F}(z) \\ \bar{\hat{F}}(z) & \bar{\hat{G}}(z) \end{pmatrix} \tag{69}$$

として各要素を定義すると、

$$\begin{pmatrix} i\omega_n - \hat{H} & -\hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^{\dagger} & i\omega_n + \hat{H}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{G}(i\omega_n) & \hat{F}(i\omega_n) \\ \bar{\hat{F}}(i\omega_n) & \bar{\hat{G}}(i\omega_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{70}$$

が得られる。

4　線形化ギャップ方程式の導出

次に、Gor'kov 方程式を用いて線形化ギャップ方程式を導出する。

4.1　Green 関数を用いたギャップ方程式の表式

まず、通常のギャップ方程式を Green 関数を用いて書く。虚時間表示の Green 関数は

$$\hat{G}_{ij}(\tau) = -\langle T_\tau c_i(\tau)c_j^{\dagger}\rangle \tag{71}$$
$$\hat{F}_{ij}(\tau) = -\langle T_\tau c_i(\tau)c_j\rangle \tag{72}$$
$$\bar{\hat{F}}_{ij}(\tau) = -\langle T_\tau c_i^{\dagger}(\tau)c_j^{\dagger}\rangle \tag{73}$$
$$\bar{\hat{G}}_{ij}(\tau) = -\langle T_\tau c_i^{\dagger}(\tau)c_j\rangle \tag{74}$$

なので、$\langle c_k c_l \rangle$ は、

$$\langle c_k c_l \rangle = \lim_{\tau \to 0+} \langle T_\tau c_k(\tau) c_l \rangle \tag{75}$$

$$= -\lim_{\tau \to 0+} \hat{F}_{kl}(\tau) \tag{76}$$

である。これを松原振動数表示すると、

$$\langle c_k c_l \rangle = -T \lim_{\tau \to 0+} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \hat{F}_{kl}(i\omega_n) \tag{77}$$

$$= -T \sum_n e^{-i\omega_n 0+} \hat{F}_{kl}(i\omega_n) \tag{78}$$

となる。よって、ギャップ方程式は

$$\Delta_{ij} \equiv -T \sum_n \sum_{kl} U_{ijkl} e^{-i\omega_n 0+} \hat{F}_{kl}(i\omega_n) \tag{79}$$

となる。

4.2 線形化ギャップ方程式

Gor'kov 方程式を各成分ごとに書くと、

$$(i\omega_n - \hat{H})\hat{G}(i\omega_n) - \hat{\Delta}\bar{\hat{F}}(i\omega_n) = 1 \tag{80}$$

$$(i\omega_n - \hat{H})\hat{F}(i\omega_n) - \hat{\Delta}\bar{\hat{G}}(i\omega_n) = 0 \tag{81}$$

$$-\hat{\Delta}^\dagger \hat{G}(i\omega_n) + (i\omega_n + \hat{H}^*)\bar{\hat{F}}(i\omega_n) = 0 \tag{82}$$

$$-\hat{\Delta}^\dagger \hat{F}(i\omega_n) + (i\omega_n + \hat{H}^*)\bar{\hat{G}}(i\omega_n) = 1 \tag{83}$$

となり、第二式を用いると、

$$\hat{F}(i\omega_n) = (i\omega_n - \hat{H})^{-1}\hat{\Delta}\bar{\hat{G}}(i\omega_n) \tag{84}$$

が得られる。ここで、温度が転移温度 T_c に近く、$\hat{\Delta}$ が非常に小さいとすると、$\hat{F}$ は $\hat{\Delta}$ の一次で展開できる。この時、常伝導状態の Green 関数を

$$\hat{G}^\mathrm{N}(i\omega_n) \equiv (i\omega_n - \hat{H})^{-1} \tag{85}$$

$$\bar{\hat{G}}^\mathrm{N}(i\omega_n) \equiv (i\omega_n + \hat{H}^*)^{-1} \tag{86}$$

と定義すると、T_c 近傍では、

$$\hat{F}(i\omega_n) = \hat{G}^\mathrm{N}(i\omega_n)\hat{\Delta}\bar{\hat{G}}^\mathrm{N}(i\omega_n) \tag{87}$$

と書ける。さらに、

$$\bar{\hat{G}}^\mathrm{N}(i\omega_n) = \left[(i\omega_n + \hat{H}^\dagger)^{-1}\right]^\mathrm{T} \tag{88}$$

$$= -\left[(-i\omega_n - \hat{H})^{-1}\right]^\mathrm{T} \tag{89}$$

$$= -\hat{G}^{\mathrm{NT}}(-i\omega_n) \tag{90}$$

を用いると、$\hat{F}$ の行列要素は

$$\hat{F}_{ij}(i\omega_n) = -\sum_{kl} \hat{G}^\mathrm{N}_{ik}(i\omega_n)\Delta_{kl}\hat{G}^\mathrm{N}_{jl}(-i\omega_n) \tag{91}$$

となる。これを式 (79) に代入すると、

$$\Delta_{ij} = T \sum_n \sum_{kl} U_{ijkl} e^{-i\omega_n 0+} \sum_{k'l'} \hat{G}^{\mathrm{N}}_{kk'}(i\omega_n) \Delta_{k'l'} \hat{G}^{\mathrm{N}}_{ll'}(-i\omega_n) \tag{92}$$

$$= T \sum_n \sum_{kl} \sum_{k'l'} U_{ijkl} e^{-i\omega_n 0+} \hat{G}^{\mathrm{N}}_{kk'}(i\omega_n) \hat{G}^{\mathrm{N}}_{ll'}(-i\omega_n) \Delta_{k'l'} \tag{93}$$

$$= \sum_{kl} \sum_{k'l'} U_{ijkl} \chi_{klk'l'}(i\omega_n) \Delta_{k'l'} \tag{94}$$

となる。ここで、

$$\chi_{klk'l'} \equiv T \sum_n e^{-i\omega_n 0+} \hat{G}^{\mathrm{N}}_{kk'}(i\omega_n) \hat{G}^{\mathrm{N}}_{ll'}(-i\omega_n) \tag{95}$$

を定義した。さらに、インデックスを、$(i,j) = \alpha$,$(k,l) = \beta$,$(k',l') = \beta'$ と束ねて表記すると、

$$\Delta_\alpha = \sum_\beta \sum_{\beta'} U_{\alpha\beta} \chi_{\beta\beta'} \Delta_{\beta'} \tag{96}$$

となり、α, β, β' などの足を持つベクトルや行列:

$$[\boldsymbol{\Delta}]_\alpha \equiv \Delta_\alpha \tag{97}$$

$$[\underline{U}]_{\alpha\beta} \equiv U_{\alpha\beta} \tag{98}$$

$$[\underline{\chi}]_{\beta\beta'} \equiv \chi_{\beta\beta'} \tag{99}$$

を定義すると、

$$\boldsymbol{\Delta} = \underline{U}\underline{\chi}\boldsymbol{\Delta} \tag{100}$$

までギャップ方程式を簡単化できる。ここまで簡単化すると、この方程式が解を持つのは、

$$\underline{U}\underline{\chi}\boldsymbol{\Delta} = \lambda\boldsymbol{\Delta} \tag{101}$$

という固有値問題の固有値が $\lambda = 1$ になる時である。線形化ギャップ方程式が厳密に成り立つのは T_{c} 直下であり、$\lambda = 1$ となる温度が転移温度 T_{c} となる。あるいは、式 (100) を

$$(1 - \underline{U}\underline{\chi})\boldsymbol{\Delta} = 0 \tag{102}$$

とすれば、$\det(1 - \underline{U}\underline{\chi}) = 0$ となるような温度が転移温度であるとも言える。さらに言えば、行列式が 0 となる時は逆行列が発散する時なので、

$$(1 - \underline{U}\underline{\chi})^{-1} \tag{103}$$

が発散する時が転移温度であるとも言える。この評価で用いる上式は、RPA(乱雑位相近似) を用いて超伝導ペア感受率が発散する時を転移温度とした時に出てくる表式の一部である。