相互作用のある系におけるトポロジカル不変量

永井佑紀

平成 28 年 1 月 19 日

相互作用のある系のトポロジカル不変量を簡便に計算する手法として、文献 [1] がある。この文献によれば、振動数ゼロのグリーン関数を対角化するだけで、相互作用のない系と同じようにトポロジカル不変量を計算できるらしい。このノートでは、二次元量子ホール系や時間反転対称性のない二次元超伝導体を特徴付けるトポロジカル不変量である Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijs (TKNN) 数が確かにこの方法で計算できることを示す。

1 グリーン関数

相互作用のない系のハミルトニアンを

$$\mathcal{H} = \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{\alpha\beta}^{N} c_{\boldsymbol{k}\alpha}^{\dagger} h_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}) c_{\boldsymbol{k}\beta} \tag{1}$$

とする。ここで、$\boldsymbol{k}$ は運動量、α や β は何らかの内部自由度のインデックスであり、スピンや軌道などである。内部自由度の数は N とする。また、$c_{\boldsymbol{k}\alpha}^{\dagger}$ は運動量 $\boldsymbol{k}$ インデックス α のフェルミ粒子を生成させる演算子である。このハミルトニアンに対するグリーン関数は、$h_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})$ を行列とみなせば

$$\hat{G}_0(\boldsymbol{k}, z) \equiv [z\hat{1} - \hat{h}(\boldsymbol{k})]^{-1} \tag{2}$$

と書けることがわかっている。ここで、$\hat{a}$ は $N \times N$ の行列である。この系に何らかの相互作用が入ったとする。この時、グリーン関数が従う Dyson 方程式は、

$$\hat{G}(\boldsymbol{k}, z) = \hat{G}_0(\boldsymbol{k}, z) + \hat{G}_0(\boldsymbol{k}, z)\hat{\Sigma}(\boldsymbol{k}, z)\hat{G}(\boldsymbol{k}, z) \tag{3}$$

となり、相互作用の入ったグリーン関数は

$$\hat{G}(z, \boldsymbol{k}) = \left[z\hat{1} - \hat{h}(\boldsymbol{k}) - \hat{\Sigma}(\boldsymbol{k}, z)\right]^{-1} \tag{4}$$

となる。一方、絶対零度の時、レーマン表示の温度グリーン関数は

$$G_{\alpha\beta}(i\omega, \boldsymbol{k}) = \sum_{m} \left[\frac{\langle 0|c_{\boldsymbol{k}\alpha}|m\rangle\langle m|c_{\boldsymbol{k}\beta}^{\dagger}|0\rangle}{i\omega - (E_m - E_0)} + \frac{\langle m|c_{\boldsymbol{k}\alpha}|0\rangle\langle 0|c_{\boldsymbol{k}\beta}^{\dagger}|m\rangle}{i\omega + (E_m - E_0)} \right] \tag{5}$$

である。ここで、$|m\rangle$ は $\check{K} = \check{H} - \mu\check{N}$ の厳密な固有ベクトルであり、$\check{H}$ は多体のハミルトニアン、μ は化学ポテンシャル、$\check{N}$ は粒子数演算子である。また、$|0\rangle$ は基底状態を表す。このグリーン関数は

$$\left[\hat{G}(i\omega, \boldsymbol{k})\right]^{\dagger} = \hat{G}(-i\omega, \boldsymbol{k}) \tag{6}$$

を満たしている。

2　トポロジカル不変量と文献 [1] の主張

2.1　波動関数による定義

系に相互作用がない場合、TKNN 数 c_1 は以下のように定義される [2]。

$$c_1 \equiv \frac{1}{2\pi}\int d^2\boldsymbol{k} f_{xy} \tag{7}$$

ここで f_{xy} はベリー曲率

$$f_{xy} \equiv \frac{\partial}{\partial k_x}a_y - \frac{\partial}{\partial k_y}a_x \tag{8}$$

であり、ベリー接続

$$a_i = -i\sum_\alpha \langle\psi^\alpha(\boldsymbol{k})|\frac{\partial}{\partial_{k_i}}|\psi^\alpha(\boldsymbol{k})\rangle \tag{9}$$

によって定義されている。ここで、$|\psi^\alpha(\boldsymbol{k})\rangle$ はハミルトニアン $\hat{h}(\boldsymbol{k})$ の固有ベクトル

$$\hat{h}(\boldsymbol{k})|\psi^\alpha(\boldsymbol{k})\rangle = \epsilon_\alpha(\boldsymbol{k})|\psi^\alpha(\boldsymbol{k})\rangle \tag{10}$$

である。また、$\sum_\alpha$ は占有されたバンドのみの和であり、フェルミエネルギーより下のエネルギー ϵ_α を持つ固有状態のみを考慮することに相当する。

詳細は参考文献 [1] 等を見ることとして、この定義は相互作用がない場合にのみ使えることに注意しておく。

2.2　グリーン関数による定義

相互作用がある場合に関しては、グリーン関数を用いた定義が存在する [3, 4]。この定義は、

$$N_2 \equiv \frac{1}{24\pi^2}\int dk_0 d^2\boldsymbol{k}\mathrm{Tr}\left[\epsilon^{\mu\nu\rho}\hat{G}\frac{\partial\hat{G}^{-1}}{\partial\mu}\hat{G}\frac{\partial\hat{G}^{-1}}{\partial\nu}\hat{G}\frac{\partial\hat{G}^{-1}}{\partial\rho}\right] \tag{11}$$

であり、添字の μ,ν,ρ は k_0,k_x,k_y のどれかであり、$\epsilon^{\mu\nu\rho}$ はレビチビタの記号である。また、$k_0 = i\omega$ である。上の式は文献 [1] と揃えているが、μ,ν,ρ はそれぞれが k_0,k_x,k_y の三つになり、和であることに注意。より具体的に書けば、

$$N_2 \equiv \int \frac{d^2\boldsymbol{k}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\mathrm{Tr}\left[\hat{G}(i\omega,\boldsymbol{k})\frac{\partial\hat{G}^{-1}(i\omega,\boldsymbol{k})}{\partial\omega}\hat{G}(i\omega,\boldsymbol{k})\frac{\partial\hat{G}^{-1}(i\omega,\boldsymbol{k})}{\partial k_x}\hat{G}(i\omega,\boldsymbol{k})\frac{\partial\hat{G}^{-1}(i\omega,\boldsymbol{k})}{\partial k_y}\right] \tag{12}$$

である。この時、グリーン関数の変数が $i\omega$ なので、ω の積分は虚軸の上を走っていることに注意。

この定義では、たとえ相互作用があったとしても、グリーン関数さえ計算できていれば、トポロジカル不変量を計算できる。しかしながら、虚軸の上の「連続的な」グリーン関数を使わなければならず、自己エネルギーがエネルギー依存している場合計算が大変である。

2.3　文献 [1] による計算方法

文献 [1] では、以下のような有効「ハミルトニアン」:

$$\hat{H}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k}) = -G^{-1}(i\omega=0,\boldsymbol{k}) \tag{13}$$

$$= \hat{h}(\boldsymbol{k}) + \hat{\Sigma}(i\omega=0,\boldsymbol{k}) \tag{14}$$

を定義する。そして、このハミルトニアンの固有値問題：

$$\hat{H}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k})|\alpha(i\omega=0,\boldsymbol{k})\rangle = -\mu_\alpha(i\omega=0,\boldsymbol{k})|\alpha(i\omega=0,\boldsymbol{k})\rangle \tag{15}$$

を考える。式 (6) より、

$$\left[G^{-1}(i\omega=0,\boldsymbol{k})\right]^\dagger = G^{-1}(i\omega=0,\boldsymbol{k}) \tag{16}$$

なので、$\hat{H}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k})$ はエルミートである。よって、$\mu_\alpha(i\omega=0,\boldsymbol{k})$ は実数である。彼らは、この有効ハミルトニアンの固有ベクトルによる TKNN 数：

$$C_1 \equiv \frac{1}{2\pi}\int d^2\boldsymbol{k}\mathcal{F}_{xy} \tag{17}$$

及びベリー曲率：

$$\mathcal{F}_{xy} \equiv \frac{\partial}{\partial k_x}\mathcal{A}_y - \frac{\partial}{\partial k_y}\mathcal{A}_x \tag{18}$$

そして、ベリー接続：

$$\mathcal{A}_i = -i\sum_{\alpha,-\mu_\alpha(i\omega=0,\boldsymbol{k})<0}\langle\alpha(i\omega=0,\boldsymbol{k})|\frac{\partial}{\partial_{k_i}}|\alpha(i\omega=0,\boldsymbol{k})\rangle \tag{19}$$

を定義すると、

$$C_1 = N_2 \tag{20}$$

であることを示した。つまり、式（11）の大変な ω 積分を行うことなしに、$\omega=0$ のグリーン関数の情報のみで、トポロジカル不変量を特徴づけることができる、と主張している。

3　導出

3.1　方針

式 (17) の導出を行う。N_2 はある整数である。よって、グリーン関数 G に対して滑らかな連続変形をしても、その整数値は変わらない。そこで、計算しやすい形になるような連続変形を行えば、N_2 を直接計算するよりも簡単になるはずである。ここで、あるパラメータ $\lambda\in[0,1]$ を持つ

$$G(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda) \equiv (1-\lambda)G(i\omega,\boldsymbol{k}) + \lambda\left[i\omega + G^{-1}(i\omega=0,\boldsymbol{k})\right]^{-1} \tag{21}$$

関数 $G(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)$ を導入する。以後、$\hat{}$ は省略することにする。$\lambda=0$ の時、

$$G(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda=0) = G(i\omega,\boldsymbol{k}) \tag{22}$$

であるから、式 (11) を使って TKNN 数 N_2 を計算できる。もし、λ を $\lambda=1$ まで連続的に変化させた時に $G(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)$ も連続的に変化することを示せれば、N_2 は λ に依存しないことを示せる。また、$\lambda=1$ の時に、

$$G(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda=1) = \left[i\omega + G^{-1}(i\omega=0,\boldsymbol{k})\right]^{-1} \tag{23}$$

$$\equiv \left[i\omega - \hat{H}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k})\right]^{-1} \tag{24}$$

となり、ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k})$ を持つ相互作用のない系のグリーン関数と等価になる。相互作用がないハミルトニアンの場合には、$N_2=c_1$ なので、有効ハミルトニアン $\hat{H}_{\mathrm{eff}}(\boldsymbol{k})$ の固有状態を使ってベリー曲率を計算すると、$N_2=C_1$ を得る。

3.2 連続変形前のグリーン関数

元の連続変形前のグリーン関数 $G(i\omega, \boldsymbol{k})$ の性質を調べる。最初に、グリーン関数の逆行列に関する固有値問題：

$$G^{-1}(i\omega, \boldsymbol{k})|\alpha(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle = \mu_\alpha(i\omega, \boldsymbol{k})|\alpha(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle \tag{25}$$

を考える。この固有値問題の固有値 μ_α は一般的に複素数である。そして、グリーン関数 $G(i\omega, \boldsymbol{k})$ の固有値は μ_α^{-1} である。さて、λ を導入してもグリーン関数が連続的にしか変化しない、と示すためには、λ を連続的に変化させた時にその固有値 $\mu_\alpha(i\omega, \boldsymbol{k}, \lambda)^{-1}$ が発散しない必要がある。そのためには、$\mu_\alpha(i\omega, \boldsymbol{k}, \lambda) \neq 0$ となることを示せばよい。そして、それを示すには、$\mathrm{Im}\,\mu_\alpha(i\omega, \boldsymbol{k}, \lambda) \neq 0$ を示せばよい。一方、前述のように、$i\omega = 0$ であれば、固有値は実数となり、$\mathrm{Im}\,\mu_\alpha(0, \boldsymbol{k}) = 0$ となってしまう。そこで、まず、

$$G^{-1}(i\omega = 0, \boldsymbol{k})|\alpha(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle = \mu_\alpha(i\omega = 0, \boldsymbol{k})|\alpha(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle \tag{26}$$

がゼロ固有値を持たないことを要請する。

$$G^{-1}(i\omega = 0, \boldsymbol{k}) = -h(\boldsymbol{k}) - \Sigma(i\omega = 0, \boldsymbol{k}) \tag{27}$$

であるから、相互作用のないハミルトニアン $h(\boldsymbol{k})$ がゼロ固有値を持たなければ、それに自己エネルギーが加わってもゼロ固有値を持たないことが期待できる。ただし、実際に計算してみて確かめなければならないことに注意。

次に、λ による連続変形をする前の固有値 $\mu_\alpha(i\omega, \boldsymbol{k})$ が $\mathrm{Im}\,\mu_\alpha(i\omega, \boldsymbol{k}) \neq 0$ であることを示す。そのためには、sign $(\mathrm{Im}\,\mu_\alpha(i\omega, \boldsymbol{k}))$ が常に 1 あるいは-1 となっていればよい。グリーン関数 G に関する固有値問題：

$$G(i\omega, \boldsymbol{k})|a(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle = \mu_a(i\omega, \boldsymbol{k})^{-1}|a(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle \tag{28}$$

を考える。固有ベクトル $|a(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle$ で挟むと、

$$\mu_a(i\omega, \boldsymbol{k})^{-1} = \frac{\langle a(i\omega, \boldsymbol{k})|G(i\omega, \boldsymbol{k})|a(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle}{\langle a(i\omega, \boldsymbol{k})|a(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle} \tag{29}$$

となる。グリーン関数を二つのエルミート行列の和：

$$G(i\omega, \boldsymbol{k}) = G_1(i\omega, \boldsymbol{k}) + iG_2(i\omega, \boldsymbol{k}) \tag{30}$$

で書く。これは、任意の正方行列はエルミート行列と反エルミート行列の和でかける：

$$A = B + C \tag{31}$$

$$B^\dagger = B \tag{32}$$

$$C^\dagger = -C \tag{33}$$

ことから常にこのように書くことができる。なお、

$$A = B + iD \tag{34}$$

とおけば、D はエルミート行列：

$$(iD)^\dagger = -iD \tag{35}$$

であることが示せる。よって、

$$\mu_a(i\omega, \boldsymbol{k})^{-1} = \frac{\langle a(i\omega, \boldsymbol{k})|G_1(i\omega, \boldsymbol{k})|a(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle}{\langle a(i\omega, \boldsymbol{k})|a(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle} + i\frac{\langle a(i\omega, \boldsymbol{k})|G_2(i\omega, \boldsymbol{k})|a(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle}{\langle a(i\omega, \boldsymbol{k})|a(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle} \tag{36}$$

となり、G_1 も G_2 もエルミート行列なので、

$$\mathrm{Im}\,(\mu_a(i\omega, \boldsymbol{k})^{-1}) = \frac{\langle a(i\omega, \boldsymbol{k})|G_2(i\omega, \boldsymbol{k})|a(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle}{\langle a(i\omega, \boldsymbol{k})|a(i\omega, \boldsymbol{k})\rangle} \tag{37}$$

が得られる。ここで、

$$\mathrm{sign}\left(\mathrm{Im}\left(\mu_a(i\omega,\boldsymbol{k})^{-1}\right)\right) = -\mathrm{sign}\left(\mathrm{Im}\left(\mu_a(i\omega,\boldsymbol{k})\right)\right) \tag{38}$$

が成り立つので、$\mathrm{sign}\left(\mathrm{Im}\left(\mu_a(i\omega,\boldsymbol{k})^{-1}\right)\right)$ を調べればよいことがわかる。$\langle a(i\omega,\boldsymbol{k})|a(i\omega,\boldsymbol{k})\rangle$ はノルムなので常に正である。式（5）は

$$G_{\alpha\beta}(i\omega,\boldsymbol{k}) = \sum_m \left[\frac{(i\omega+(E_m-E_0))\langle 0|c_{\boldsymbol{k}\alpha}|m\rangle\langle m|c^\dagger_{\boldsymbol{k}\beta}|0\rangle + (i\omega-(E_m-E_0))\langle m|c_{\boldsymbol{k}\alpha}|0\rangle\langle 0|c^\dagger_{\boldsymbol{k}\beta}|m\rangle}{-(\omega^2+(E_m-E_0)^2)}\right] \tag{39}$$

であり、

$$G^\dagger = G_1 - iG_2 \tag{40}$$

から、

$$G^*_{\beta\alpha}(i\omega,\boldsymbol{k}) = \sum_m \left[\frac{(-i\omega+(E_m-E_0))\langle m|c_{\boldsymbol{k}\alpha}|0\rangle\langle 0|c^\dagger_{\boldsymbol{k}\beta}|m\rangle + (-i\omega-(E_m-E_0))\langle 0|c_{\boldsymbol{k}\alpha}|m\rangle\langle m|c^\dagger_{\boldsymbol{k}\beta}|0\rangle}{-(\omega^2+(E_m-E_0)^2)}\right] \tag{41}$$

なので、

$$[G_2]_{\alpha\beta} = -\sum_m \frac{\omega}{\omega^2+(E_m-E_0)^2}\left[\langle 0|c_{\boldsymbol{k}\alpha}|m\rangle\langle m|c^\dagger_{\boldsymbol{k}\beta}|0\rangle + \langle m|c_{\boldsymbol{k}\alpha}|0\rangle\langle 0|c^\dagger_{\boldsymbol{k}\beta}|m\rangle\right] \tag{42}$$

となる。さらに、

$$u_{m\alpha}(\boldsymbol{k}) \equiv \langle m|c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}|0\rangle \tag{43}$$

$$v_{m\alpha}(\boldsymbol{k}) \equiv \langle 0|c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}|m\rangle \tag{44}$$

$$d_m(i\omega) \equiv \frac{\omega}{\omega^2+(E_m-E_0)^2} \tag{45}$$

を定義すれば、

$$[G_2]_{\alpha\beta} = -\sum_m d_m\left[u^*_{m\alpha}(\boldsymbol{k})u_{m\beta}(\boldsymbol{k}) + v^*_{m\alpha}(\boldsymbol{k})v_{m\beta}(\boldsymbol{k})\right] \tag{46}$$

となる。よって、

$$\langle a(i\omega,\boldsymbol{k})|G_2(i\omega,\boldsymbol{k})|a(i\omega,\boldsymbol{k})\rangle = \sum_{\alpha\beta} a^*_\alpha[G_2]_{\alpha\beta}a_\beta \tag{47}$$

$$= -\sum_m d_m\left[|\sum_\alpha a_\alpha u_{m\alpha}|^2 + |\sum_\alpha a_\alpha v_{m\alpha}|^2\right] \tag{48}$$

が得られる。絶対値の部分は当然正なので、

$$\mathrm{sign}\ \left(\langle a(i\omega,\boldsymbol{k})|G_2(i\omega,\boldsymbol{k})|a(i\omega,\boldsymbol{k})\rangle\right) = -\mathrm{sign}\, d_m(i\omega) \tag{49}$$

$$= -\mathrm{sign}\,\omega \tag{50}$$

となり、

$$\mathrm{sign}\left(\mathrm{Im}\left(\mu_a(i\omega,\boldsymbol{k})\right)\right) = \mathrm{sign}\,\omega \tag{51}$$

が得られる。つまり、$\omega \neq 0$ であれば、常に $\mu_\alpha(i\omega,\boldsymbol{k})$ は虚部を持つことを示すことができた。

3.3 連続変形をしたグリーン関数

次に、$\mu_\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)$ が λ の値に依らずに $\mathrm{Im}\,\mu_\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\neq 0$ であることを示す。なお、$i\omega=0$ の時は、

$$G(i\omega=0,\boldsymbol{k},\lambda)=G(i\omega=0,\boldsymbol{k}) \tag{52}$$

が常になりたち、$\lambda=0$ である前節に帰着する。先ほどと同様に、固有値問題：

$$G(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle=\mu_\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)^{-1}|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle \tag{53}$$

を考え、その固有ベクトル $|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle$ を使って、

$$\mu_\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)^{-1}=\frac{\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|G(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle}{\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle} \tag{54}$$

とする。これに、式 (21) を代入すると、

$$\begin{aligned}\mu_\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)^{-1}=(1-\lambda)&\frac{\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|\left(G_1(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)+iG_2(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\right)|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle}{\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle}\\ &+\lambda\frac{\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|\left[i\omega+G^{-1}(i\omega=0,\boldsymbol{k})\right]^{-1}|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle}{\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle}\end{aligned} \tag{55}$$

となる。ここで、$G^{-1}(i\omega=0,\boldsymbol{k})$ に関する固有値問題：

$$-G^{-1}(i\omega=0,\boldsymbol{k})|s(\boldsymbol{k})\rangle=\epsilon_s(\boldsymbol{k})|s(\boldsymbol{k})\rangle \tag{56}$$

を考えると、

$$\left[i\omega+G^{-1}(i\omega=0,\boldsymbol{k})\right]^{-1}=\left[\sum_s(i\omega-\epsilon_s(\boldsymbol{k}))|s(\boldsymbol{k})\rangle\langle s(\boldsymbol{k})|\right]^{-1} \tag{57}$$

$$=\sum_s\frac{1}{i\omega-\epsilon_s(\boldsymbol{k})}|s(\boldsymbol{k})\rangle\langle s(\boldsymbol{k})| \tag{58}$$

となるので、

$$\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|\left[i\omega+G^{-1}(i\omega=0,\boldsymbol{k})\right]^{-1}|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle=\sum_s\frac{1}{i\omega-\epsilon_s(\boldsymbol{k})}\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|s(\boldsymbol{k})\rangle\langle s(\boldsymbol{k})|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle \tag{59}$$

$$=\sum_s\frac{-(\epsilon_s(\boldsymbol{k})+i\omega)}{\omega^2+\epsilon_s(\boldsymbol{k})^2}\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|s(\boldsymbol{k})\rangle\langle s(\boldsymbol{k})|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle \tag{60}$$

$$=-\sum_s\frac{\epsilon_s(\boldsymbol{k})}{\omega^2+\epsilon_s(\boldsymbol{k})^2}|\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|s(\boldsymbol{k})\rangle|^2-i\omega\sum_s\frac{1}{\omega^2+\epsilon_s(\boldsymbol{k})^2}|\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|s(\boldsymbol{k})\rangle|^2 \tag{61}$$

となる。ϵ_s は実数なので、

$$\mathrm{Im}\,\left(\mu_\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)^{-1}\right)=\frac{(1-\lambda)\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|G_2(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle-\lambda\omega\sum_s(\omega^2+\epsilon_s(\boldsymbol{k})^2)^{-1}|\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|s(\boldsymbol{k})\rangle|^2}{\langle\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)|\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\rangle} \tag{62}$$

となる。分子第一項と第二項は同符号であり、結局、

$$\mathrm{sign}\,\left[\mathrm{Im}\,\left(\mu_\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)^{-1}\right)\right]=-\mathrm{sign}\,\omega \tag{63}$$

となって、

$$\mathrm{sign}\,\left[\mathrm{Im}\,\left(\mu_\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\right)\right]=\mathrm{sign}\,\omega \tag{64}$$

となる。つまり、$i\omega\neq 0$ で $\mu_\alpha(i\omega,\boldsymbol{k},\lambda)$ の虚部は常に値を持つ。

以上より、H_{eff} がゼロ固有値を持たなければ、λ によるグリーン関数の変形は連続変形とみなすことができ、連続変形では N_2 は変わらない。また、$\lambda=1$ とした時には、相互作用のある系のグリーン関数は相互作用のないハミルトニアン H_{eff} によるグリーン関数と等価になり、その結果、波動関数による定義とグリーン関数による定義が一致し、C_1 によって TKNN 数を計算できる。

参考文献

[1] Zhong Wang and Shou-Cheng Zhang, Simplified Topological Invariants for Interacting Insulators, Phys. Rev. X **2**, 031008 (2012).

[2] 安藤陽一、トポロジカル絶縁体入門、講談社 (2014)

[3] K. Ishikawa and T. Matsuyama, Magnetic Field Induced Multicomponent QED_3 and Quantum Hall Effect, Z. Phys. C **33**, 41 (1986).

[4] G. E. Volovik, The Universe in a Helium Droplet (Oxford University Press, New York, 2003).