Usadel 方程式の導出

永井佑紀

平成 25 年 11 月 2 日

Eilenberger 方程式の dirty limit を取ると、Usadel 方程式になる。これを導出してみた。また、Eilenberger 方程式を変形した Ricatti 方程式に出てくる変数で Usadel 方程式を書き直す [2] ということもやってみた。

1 Eilenberger 方程式

Eilenberger 方程式は

$$\left[z\check{\tau}_3 - \check{\Delta} - \check{\Sigma}_{\mathrm{imp}}, \check{g}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}) \right]_- + i\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \check{g}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}) = 0 \tag{1}$$

と書ける。ここで、ベクトルポテンシャルはゼロとした [1]。ここで、τ_i は南部空間での Pauli 行列である。また、z は複素数、$\check{\Delta}$ は 4×4 の行列であり、

$$\check{\Delta} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\Delta} \\ \hat{\Delta}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

である。準古典 Green 関数 $\check{g}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{F}})$ の規格化条件を

$$\check{g}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{F}})\check{g}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}) = -\pi^2 \check{1} \tag{3}$$

とする。

2 Dirty limit

2.1 異方性に関する展開と規格化条件

Dirty limit では、準古典 Green 関数 $\check{g}$ はほとんど等方的であると考えられる。そこで、

$$\check{g}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}) = \check{g}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}) \cdot \check{\boldsymbol{g}}_1(\boldsymbol{r}) = \check{g}_0(\boldsymbol{r}) + \sum_\alpha v_{\mathrm{F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}) \check{g}_{1\alpha}(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

というように、等方的な関数 $\check{g}_0(\boldsymbol{r})$ からの展開を考える。ここで、$\check{\boldsymbol{g}}_1$ も等方的な関数であり、異方性はフェルミ速度の一次までの展開で入ってくると考えている。したがって、フェルミ面平均をとると

$$\langle \check{g}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}) \rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}} = \check{g}_0(\boldsymbol{r}) \tag{5}$$

となる。このとき、規格化条件は

$$\check{g}_0\check{g}_0 + \check{g}_0 \boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}) \cdot \check{\boldsymbol{g}}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}) \cdot \check{\boldsymbol{g}}_1(\boldsymbol{r}) \check{g}_0 = -\pi^2 \check{1} \tag{6}$$

となる。ここで、$\check{\boldsymbol{g}}_1$ の一次までとり、二次を無視した。さらに、$\check{g}_0\check{g}_0 = -\pi^2\check{1}$ とすれば、

$$\check{g}_0 \boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}) \cdot \check{\boldsymbol{g}}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}) \cdot \check{\boldsymbol{g}}_1(\boldsymbol{r}) \check{g}_0 = 0 \tag{7}$$

$$\sum_\alpha v_{\mathrm{F}\alpha} \left[\check{g}_0, \check{g}_{1\alpha} \right]_+ = 0 \tag{8}$$

が得られる。

[1] ベクトルポテンシャルがある場合でも Usadel 方程式は同様の手順で導出できる。

2.2 フェルミ面平均 I

式 (1) のフェルミ面平均をとると、

$$\langle \left[z\check{\tau}_3 - \check{\Delta} - \check{\Sigma}_{\rm imp}, \check{g}_0(\boldsymbol{r}) + \sum_\alpha v_{{\rm F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\rm F})\check{g}_{1\alpha}(\boldsymbol{r}) \right]_- \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} + i\sum_\alpha \langle v_{{\rm F}\alpha}\nabla_\alpha \left(\check{g}_0(\boldsymbol{r}) + \sum_\beta v_{{\rm F}\beta}(\boldsymbol{k}_{\rm F})\check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) \right) \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} = 0 \quad (9)$$

となる。ここで、$\boldsymbol{v}_{\rm F}$ が $\boldsymbol{k}_{\rm F}$ に関して奇関数であるとするとし、

$$\langle \check{\Delta} \sum_\alpha v_{{\rm F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\rm F})\check{g}_{1\alpha}(\boldsymbol{r}) \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} = 0 \quad (10)$$

$$\langle \check{\Sigma}_{\rm imp} \sum_\alpha v_{{\rm F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\rm F})(\boldsymbol{k}_{\rm F})\check{g}_{1\alpha}(\boldsymbol{r}) \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} = 0 \quad (11)$$

であると仮定する。$\check{\Delta}$ が波数依存しないせず (s 波等)、不純物自己エネルギー $\check{\Sigma}_{\rm imp}$ も波数依存しないとき (Born 近似や T-matrix 近似)、この仮定は成り立つ。このとき、

$$\langle \left[z\check{\tau}_3 - \check{\Delta} - \check{\Sigma}_{\rm imp}, \check{g}_0(\boldsymbol{r}) \right]_- \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} + i\sum_{\alpha\beta} \langle v_{{\rm F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) v_{{\rm F}\beta}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} \nabla_\alpha \check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad (12)$$

となる。さらに、不純物自己エネルギーが Born 近似で表されているとすると、

$$\begin{aligned} \langle \check{\Sigma}_{\rm imp} \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} &= \frac{1}{2\pi\tau} \langle \check{g}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}_{\rm F}) \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} && (13) \\ &= \frac{1}{2\pi\tau} \check{g}_0(\boldsymbol{r}) && (14) \end{aligned}$$

となるので、

$$\tau \langle \left[z\check{\tau}_3 - \check{\Delta}, \check{g}_0(\boldsymbol{r}) \right]_- \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} + i\sum_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} \nabla_\alpha \check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad (15)$$

となる。ここで、

$$D_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{\tau} \langle v_{{\rm F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) v_{{\rm F}\beta}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} \quad (16)$$

と定義した。この方程式から $\check{g}_{1\beta}$ を消去することで、Usadel 方程式が得られる。

2.3 フェルミ面平均 II

次に、フェルミ速度 $v_{{\rm F}\alpha}$ を左からかけてからフェルミ面平均をとると、

$$\begin{aligned} &\langle v_{{\rm F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) \left[z\check{\tau}_3 - \check{\Delta} - \check{\Sigma}_{\rm imp}, \check{g}_0(\boldsymbol{r}) + \sum_\beta v_{{\rm F}\beta}(\boldsymbol{k}_{\rm F})\check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) \right]_- \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} \\ &+ i\sum_{\alpha\beta} \langle v_{{\rm F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) v_{{\rm F}\beta}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) \nabla_\beta \left(\check{g}_0(\boldsymbol{r}) + \sum_\gamma v_{{\rm F}\gamma}(\boldsymbol{k}_{\rm F})\check{g}_{1\gamma}(\boldsymbol{r}) \right) \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} = 0 && (17) \\ &\langle v_{{\rm F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) \left[z\check{\tau}_3 - \check{\Delta} - \check{\Sigma}_{\rm imp}, \sum_\beta v_{{\rm F}\beta}(\boldsymbol{k}_{\rm F})\check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) \right]_- \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} + i\sum_{\alpha\beta} \langle v_{{\rm F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) v_{{\rm F}\beta}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) \nabla_\beta \check{g}_0(\boldsymbol{r}) \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} = 0 && (18) \end{aligned}$$

となる。ここで、Dirty limit をとっているので、$\check{\Delta}$,z よりも Born 近似の不純物自己エネルギーの方がはるかに大きいとすると、

$$\begin{aligned} \sum_\beta \langle v_{{\rm F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) v_{{\rm F}\beta}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} \left[-\frac{1}{2\pi\tau} \check{g}_0(\boldsymbol{r}), \check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) \right]_- + i\sum_{\alpha\beta} \langle v_{{\rm F}\alpha}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) v_{{\rm F}\beta}(\boldsymbol{k}_{\rm F}) \rangle_{\boldsymbol{k}_{\rm F}} \nabla_\beta \check{g}_0(\boldsymbol{r}) = 0 && (19) \\ -\frac{1}{2\pi\tau} \left[\check{g}_0(\boldsymbol{r}), \check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) \right]_- + i\nabla_\beta \check{g}_0(\boldsymbol{r}) = 0 && (20) \end{aligned}$$

となる。さらに、式 (8) の規格化条件を少しきつくして、

$$[\check{g}_0, \check{g}_{1\alpha}]_+ = 0 \tag{21}$$

が成り立っていると仮定すると、

$$\begin{align}
[\check{g}_0(\boldsymbol{r}), \check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r})]_- &= \check{g}_0(\boldsymbol{r})\check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) - \check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r})\check{g}_0(\boldsymbol{r}) \tag{22}\\
&= 2\check{g}_0(\boldsymbol{r})\check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) - [\check{g}_0, \check{g}_{1\alpha}]_+ \tag{23}\\
&= 2\check{g}_0(\boldsymbol{r})\check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) \tag{24}
\end{align}$$

となるので、

$$-\frac{1}{\pi\tau}\check{g}_0(\boldsymbol{r})\check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) + i\nabla_\beta \check{g}_0(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{25}$$

が得られる。

2.4 Usadel 方程式

式 (26) の左から $\check{g}_0$ をかけると、

$$\frac{\pi}{\tau}\check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) + i\check{g}_0(\boldsymbol{r})\nabla_\beta \check{g}_0(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{26}$$

となるので、$\check{g}_{1\beta}$ は

$$\check{g}_{1\beta}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\tau}{\pi} i\check{g}_0(\boldsymbol{r})\nabla_\beta \check{g}_0(\boldsymbol{r}) \tag{27}$$

となる。

この結果を式 (15) に代入すると、

$$\begin{align}
\tau\langle\left[z\check{\tau}_3 - \check{\Delta}, \check{g}_0(\boldsymbol{r})\right]_-\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}} + i(-i)\frac{\tau}{\pi}\sum_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}\nabla_\alpha\left(\check{g}_0(\boldsymbol{r})\nabla_\beta \check{g}_0(\boldsymbol{r})\right) = 0 \tag{28}\\
\pi\left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}, \check{g}_0(\boldsymbol{r})\right]_- + \sum_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}\nabla_\alpha\left(\check{g}_0(\boldsymbol{r})\nabla_\beta \check{g}_0(\boldsymbol{r})\right) = 0 \tag{29}
\end{align}$$

となる。そして、

$$D_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} D \tag{30}$$

という仮定をすると、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\check{g}_0(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}\check{g}_0(\boldsymbol{r})\right) + \frac{\pi}{D}\left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}, \check{g}_0(\boldsymbol{r})\right]_- = 0 \tag{31}$$

が得られる。これが Usadel 方程式である。

3 Riccati parametrization

3.1 Projection operators

Eilenberger 方程式を変形して Riccati 方程式を導出したときのように、Projection method を用いる。今回は、

$$\check{P}_\pm \equiv \frac{1}{2}\left(\check{1} \mp \frac{\check{g}_0}{i\pi}\right) \tag{32}$$

という Projecting operator $\check{P}_{\pm}$ を定義する。これらは

$$\check{g}_0 = -i\pi(\check{P}_+ - \check{P}_-) = -i\pi(2\check{P}_+ - \check{1}) \tag{33}$$

$$\check{P}_+ + \check{P}_- = \check{1} \tag{34}$$

$$\check{P}_{\pm}\check{P}_{\pm} = \check{P}_{\pm} \tag{35}$$

$$\check{P}_{\pm}\check{P}_{\mp} = \check{P}_{\mp}\check{P}_{\pm} = 0 \tag{36}$$

を満たす。式 (31) をこの Projecting operator を使って書き直す。まず、

$$\check{g}_0\boldsymbol{\nabla}\check{g}_0 = -\pi^2(\check{P}_+ - \check{P}_-)\boldsymbol{\nabla}\left(2\check{P}_+ - \check{1}\right) \tag{37}$$

$$= -2\pi^2\left(\check{P}_+\boldsymbol{\nabla}\check{P}_+ - \check{P}_-\boldsymbol{\nabla}\check{P}_+\right) \tag{38}$$

なので、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\check{g}_0\boldsymbol{\nabla}\check{g}_0) = -2\pi^2\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_+\boldsymbol{\nabla}\check{P}_+ + \check{P}_+\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_+ - \boldsymbol{\nabla}\check{P}_-\boldsymbol{\nabla}\check{P}_+ - \check{P}_-\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_+\right) \tag{39}$$

となる。ここで、

$$\boldsymbol{\nabla}\check{P}_+ + \boldsymbol{\nabla}\check{P}_- = 0 \tag{40}$$

を用いると、

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\check{g}_0\boldsymbol{\nabla}\check{g}_0) = -2\pi^2\left(2\boldsymbol{\nabla}\check{P}_+\boldsymbol{\nabla}\check{P}_+ + \check{P}_+\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_+ - \check{P}_-\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_+\right) \tag{41}$$

となる。

これをもう少し整理したい。そのため、式 (35) を微分して

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\check{P}_{\pm}\check{P}_{\pm}\right) = \boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm} \tag{42}$$

$$\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm} + \check{P}_{\pm}\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm} = \boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm} \tag{43}$$

として右側から $\check{P}_{\pm}$ をかけると

$$\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm}\check{P}_{\pm} + \check{P}_{\pm}\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm} = \left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm} \tag{44}$$

$$\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm} + \check{P}_{\pm}\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm} = \left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm} \tag{45}$$

となるので、

$$\check{P}_{\pm}\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm} = 0 \tag{46}$$

を得る。これをさらに微分すると、

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\check{P}_{\pm}\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm}\right) = 0 \tag{47}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm} + \check{P}_{\pm}\left(\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm} + \check{P}_{\pm}\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm} = 0 \tag{48}$$

なので、左側から $\check{P}_{\pm}$、右側から $\check{P}_{\mp}$ をかけると、

$$\check{P}_{\pm}\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm}\check{P}_{\mp} + \check{P}_{\pm}\check{P}_{\pm}\left(\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\pm}\check{P}_{\mp} + \check{P}_{\pm}\check{P}_{\pm}\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\mp} = 0 \tag{49}$$

となり、式 (35)(36) を用いると、

$$\check{P}_{\pm}\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm}\right)\check{P}_{\mp} = 0 \tag{50}$$

が得られる。

よって、式 (41) に、左側から $\check{P}_+$、右側から $\check{P}_-$ をかけると、

$$\check{P}_+ \boldsymbol{\nabla} \cdot (\check{g}_0 \boldsymbol{\nabla} \check{g}_0)\, \check{P}_- = -2\pi^2 \check{P}_+ \left(\boldsymbol{\nabla}^2 \check{P}_+\right) \check{P}_- \tag{51}$$

が得られる。以上から、Usadel 方程式の両側から $\check{P}_\pm$ をはさむと見通しがよくなることが予想できる。したがって、他の項も同様に計算すると、

$$\begin{aligned}
\check{P}_+ \left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}, \check{g}_0(\boldsymbol{r})\right]_- \check{P}_- &= -i\pi \check{P}_+ \left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}, \check{P}_+ - \check{P}_-\right]_- \check{P}_- && (52)\\
&= -i\pi \left\{\check{P}_+ \left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right)\left(\check{P}_+ - \check{P}_-\right)\check{P}_- - \check{P}_+ \left(\check{P}_+ - \check{P}_-\right)\left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right)\right\}\check{P}_- && (53)\\
&= -i\pi \left\{-\check{P}_+ \left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right)\check{P}_- - \check{P}_+ \left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right)\right\}\check{P}_- && (54)\\
&= 2i\pi \check{P}_+ \left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right)\check{P}_- && (55)
\end{aligned}$$

となる。一方、

$$\begin{aligned}
\check{P}_+ \left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}, \check{P}_+\right]_- \check{P}_- &= \check{P}_+ \left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right)\check{P}_+\check{P}_- - \check{P}_+\check{P}_+ \left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right)\check{P}_- && (56)\\
&= -\check{P}_+ \left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right)\check{P}_- && (57)
\end{aligned}$$

なので、

$$\frac{\pi}{D}\check{P}_+ \left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}, \check{g}_0(\boldsymbol{r})\right]_- \check{P}_- = -i\frac{2\pi^2}{D}\check{P}_+ \left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}, \check{P}_+\right]_- \check{P}_- \tag{58}$$

が得られる。以上から、

$$\check{P}_+ \left(\left(\boldsymbol{\nabla}^2 \check{P}_+\right) + \frac{i}{D}\left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}, \check{P}_+\right]_-\right)\check{P}_- = 0 \tag{59}$$

が得られる。

3.2 Riccati parametrization

以前の Eilenberger 方程式のときと同様に、2×2 行列の $\hat{a}$ と $\hat{b}$ を導入すると、

$$\check{P}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \hat{a} \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\check{P}_- = \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

となる。$\check{P}_+ + \check{P}_- = \check{1}$ より、

$$\hat{b}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1} = (1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\hat{b} \tag{62}$$

が成り立つ。よって、

$$\boldsymbol{\nabla}\check{P}_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ -\boldsymbol{\nabla}\hat{b} \end{pmatrix}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \hat{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \hat{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\nabla}\hat{a} \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_+ = &\begin{pmatrix} 0 \\ -\boldsymbol{\nabla}^2\hat{b} \end{pmatrix}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \hat{a} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -\boldsymbol{\nabla}\hat{b} \end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \hat{a} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -\boldsymbol{\nabla}\hat{b} \end{pmatrix}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\nabla}\hat{a} \end{pmatrix}\\
&+ 2\begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\nabla}\hat{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}^2(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \hat{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\nabla}^2\hat{a} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{64}$$

さて、ここで、

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix} = (-\hat{a} + \hat{a}) = 0 \tag{65}$$

を利用すると、

$$(\boldsymbol{\nabla}^2 \check{P}_+)\check{P}_- = \left[2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\boldsymbol{\nabla}\hat{b} \end{pmatrix} (1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\boldsymbol{\nabla}\hat{a} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix} (1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\boldsymbol{\nabla}^2\hat{a} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\boldsymbol{\nabla}\hat{a} \right] (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \tag{66}$$

となる。さらに、

$$\boldsymbol{\nabla}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1} = (1-\hat{a}\hat{b})^{-1}(\boldsymbol{\nabla}(\hat{a}\hat{b}))(1-\hat{a}\hat{b})^{-1} \tag{67}$$

$$= (1-\hat{a}\hat{b})^{-1}((\boldsymbol{\nabla}\hat{a})\hat{b} + \hat{a}\boldsymbol{\nabla}\hat{b})(1-\hat{a}\hat{b})^{-1} \tag{68}$$

を用いると、

$$\check{P}_+(\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_+)\check{P}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix} (1-\hat{a}\hat{b})^{-1} \left[-2\hat{a}(\boldsymbol{\nabla}\hat{b})(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\boldsymbol{\nabla}\hat{a} + \boldsymbol{\nabla}^2\hat{a} + (\boldsymbol{\nabla}(\hat{a}\hat{b}))(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\boldsymbol{\nabla}\hat{a} \right] (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \tag{69}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix} (1-\hat{a}\hat{b})^{-1} \left[2(\boldsymbol{\nabla}\hat{a})\hat{b}(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}\boldsymbol{\nabla}\hat{a} + \boldsymbol{\nabla}^2\hat{a} \right] (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \tag{70}$$

となる。

次に、

$$\check{P}_+\check{\tau}_3\check{P}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix} (1-\hat{a}\hat{b})^{-1} \left[-2\hat{a} \right] (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \tag{71}$$

$$\check{P}_+\langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}\check{P}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix} (1-\hat{a}\hat{b})^{-1} \left[-\langle\hat{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}} - \hat{a}\langle\hat{\Delta}^\dagger\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}\hat{a} \right] (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \tag{72}$$

と式 (57) から、

$$\check{P}_+ \frac{i}{D} \left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}, \check{P}_+ \right]_- \check{P}_- = -\check{P}_+ \frac{i}{D} \left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}} \right) \check{P}_- \tag{73}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix} (1-\hat{a}\hat{b})^{-1} \frac{i}{D} \left[2z\hat{a} - \langle\hat{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}} - \hat{a}\langle\hat{\Delta}^\dagger\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}\hat{a} \right] (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

となるので、式 (59) は、

$$(\boldsymbol{\nabla}\hat{a}) \left[(1-\hat{a}\hat{b})^{-1} 2\hat{b} \right] \boldsymbol{\nabla}\hat{a} + \boldsymbol{\nabla}^2\hat{a} + \frac{i}{D} \left[2z\hat{a} - \langle\hat{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}} - \hat{a}\langle\hat{\Delta}^\dagger\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}\hat{a} \right] = 0 \tag{75}$$

という Riccati parametrization による Usadel 方程式が得られる。

3.3 対となる方程式

次に、$\hat{b}$ に関する方程式を導出したい。一番簡単なのは $\hat{a}$ と $\hat{b}$ に関する対称性を利用する方法であるが、このノートでは Projection method から直接導出することにする。式 (43) の右から $\check{P}_\mp$、左から $\check{P}_\mp$ をかけると、

$$0 = \check{P}_\mp(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_\pm)\check{P}_\mp \tag{76}$$

となり、これを微分すると、

$$0 = \boldsymbol{\nabla}\left(\check{P}_{\mp}(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm})\check{P}_{\mp}\right) \tag{77}$$

$$= \boldsymbol{\nabla}(\check{P}_{\mp})(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm})\check{P}_{\mp} + \check{P}_{\mp}(\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_{\pm})\check{P}_{\mp} + \check{P}_{\mp}(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm})\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\mp} \tag{78}$$

となり、左側から $\check{P}_{\mp}$、右側から $\check{P}_{\pm}$ をかけると

$$0 = \check{P}_{\mp}(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm})(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\mp})\check{P}_{\pm} \tag{79}$$

$$= \check{P}_{\mp}(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm})(\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{\pm})\check{P}_{\pm} \tag{80}$$

となる。よって、式 (41) の左側から $\check{P}_{-}$、右側から $\check{P}_{+}$ をかけると

$$\check{P}_{-}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\check{g}_0\boldsymbol{\nabla}\check{g}_0)\,\check{P}_{+} = -2\pi^2\check{P}_{-}\left(2\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{+}\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{+} + \check{P}_{+}\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_{+} - \check{P}_{-}\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_{+}\right)\check{P}_{+} \tag{81}$$

$$= 2\pi^2\check{P}_{-}(\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_{+})\check{P}_{+} \tag{82}$$

$$= -2\pi^2\check{P}_{-}(\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_{-})\check{P}_{+} \tag{83}$$

が得られる。ここで、

$$\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_{+} + \boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_{-} = 0 \tag{84}$$

を用いた。ここで、$\hat{a}$ と $\hat{b}$ を導入して、$\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{-}$ を計算すると、

$$\boldsymbol{\nabla}\check{P}_{-} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\nabla}\hat{a} \\ 0 \end{pmatrix}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\hat{b} & 0 \end{pmatrix} \tag{85}$$

であり、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_{-} = &\begin{pmatrix} -\boldsymbol{\nabla}^2\hat{a} \\ 0 \end{pmatrix}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\nabla}\hat{a} \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\nabla}\hat{a} \\ 0 \end{pmatrix}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\hat{b} & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\nabla}\hat{a} \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}^2(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\hat{b} & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\nabla}\hat{a} \\ 0 \end{pmatrix}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\hat{b} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\hat{b} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}^2\hat{b} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{86}$$

となり、

$$\begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\hat{b} \end{pmatrix} = 0 \tag{87}$$

を用いると、

$$\check{P}_{-}\boldsymbol{\nabla}^2\check{P}_{-}\check{P}_{+} = \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix}(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\left[\boldsymbol{\nabla}^2\hat{b} + 2(\boldsymbol{\nabla}\hat{b})(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\hat{a}(\boldsymbol{\nabla}\hat{b})\right](1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \tag{88}$$

他の項も同様に計算すると、

$$\check{P}_{-}\left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}, \check{g}_0(\boldsymbol{r})\right]_{-}\check{P}_{+} = -i\pi\check{P}_{-}\left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}, \check{P}_{+} - \check{P}_{-}\right]_{-}\check{P}_{+} \tag{89}$$

$$= -i\pi\left\{\check{P}_{-}\left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}\right)\left(\check{P}_{+} - \check{P}_{-}\right)\check{P}_{+} - \check{P}_{-}\left(\check{P}_{+} - \check{P}_{-}\right)\left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}\right)\right\}\check{P}_{+} \tag{90}$$

$$= -i\pi\left\{\check{P}_{-}\left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}\right)\check{P}_{+} + \check{P}_{-}\left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}\right)\right\}\check{P}_{+} \tag{91}$$

$$= -2i\pi\check{P}_{-}\left(z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}}\right)\check{P}_{+} \tag{92}$$

となるので、

$$\check{P}_-\check{\tau}_3\check{P}_+ = \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix} (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \left[2\hat{b}\right] (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \tag{93}$$

$$\check{P}_-\langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\check{P}_+ = \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix} (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \left[\hat{b}\langle\hat{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\hat{b} + \langle\hat{\Delta}^\dagger\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right] (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \tag{94}$$

より、

$$\check{P}_- \left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}, \check{g}_0(\boldsymbol{r})\right]_- \check{P}_+ = -2i\pi \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix} (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \left[2z\hat{b} - \hat{b}\langle\hat{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\hat{b} - \langle\hat{\Delta}^\dagger\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right] (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \tag{95}$$

となる。よって、

$$\check{P}_- \left[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\check{g}_0(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\nabla}\check{g}_0(\boldsymbol{r})) + \frac{\pi}{D}\left[z\check{\tau}_3 - \langle\check{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}, \check{g}_0(\boldsymbol{r})\right]_-\right] \check{P}_+ = 0 \tag{96}$$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix} (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \left(-2\pi^2\right) \left[\boldsymbol{\nabla}^2\hat{b} + 2(\boldsymbol{\nabla}\hat{b})(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\hat{a}(\boldsymbol{\nabla}\hat{b})\right] (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\hat{a} \\ 1 \end{pmatrix} (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \left(-i\frac{2\pi^2}{D}\right) \left[2z\hat{b} - \hat{b}\langle\hat{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\hat{b} - \langle\hat{\Delta}^\dagger\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right] (1-\hat{b}\hat{a})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{b} & 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{97}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\hat{b} + 2(\boldsymbol{\nabla}\hat{b})(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}\hat{a}(\boldsymbol{\nabla}\hat{b}) + \frac{i}{D}\left(2z\hat{b} - \hat{b}\langle\hat{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\hat{b} - \langle\hat{\Delta}^\dagger\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\right) = 0 \tag{98}$$

となる。

3.4 Usadel 方程式

以上から、Usadel 方程式は

$$\boldsymbol{\nabla}^2\hat{a} + (\boldsymbol{\nabla}\hat{a})\left[(1-\hat{a}\hat{b})^{-1}2\hat{b}\right]\boldsymbol{\nabla}\hat{a} + \frac{i}{D}\left[2z\hat{a} - \langle\hat{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}} - \hat{a}\langle\hat{\Delta}^\dagger\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\hat{a}\right] = 0 \tag{99}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\hat{b} + (\boldsymbol{\nabla}\hat{b})\left[(1-\hat{b}\hat{a})^{-1}2\hat{a}\right]\boldsymbol{\nabla}\hat{b} + \frac{i}{D}\left[2z\hat{b} - \langle\hat{\Delta}^\dagger\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}} - \hat{b}\langle\hat{\Delta}\rangle_{\boldsymbol{k}_\mathrm{F}}\hat{b}\right] = 0 \tag{100}$$

となる。

参考文献

[1] N. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity.* (Clarendon Press, Oxford, 2001).

[2] K. Tanaka, and M. Eschrig, Supercond. Sci. Technol. **22** (2009) 014001.