Wigner 表示を使った Eilenberger 方程式の導出

永井佑紀

平成 25 年 7 月 10 日

Kopnin の教科書に準じたやり方よりもより洗練されていると思われる、Wigner 表示を使った Eilenberger 方程式の導出についてまとめた。

1 Gor'kov 方程式と Wigner 表示

1.1 Gor'kov 方程式

Dyson 方程式は一般的に

$$\int d\boldsymbol{r}_3 (i\omega_n \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3) - \check{H}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3))\check{G}(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_2; i\omega_n) = \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \tag{1}$$

と書ける。ここで、ハミルトニアン $\check{H}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ として BCS ハミルトニアン

$$\check{H}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \begin{pmatrix} \delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\hat{H}(\boldsymbol{r}_2) & \hat{\Delta}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) \\ \hat{\Delta}^\dagger(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1) & -\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\hat{H}^*(\boldsymbol{r}_2) \end{pmatrix} \tag{2}$$

を採用すると、上記の Dyson 方程式は Gor'kov 方程式と呼ばれる。このハミルトニアンは、行列のエルミート共役をとって $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ を入れ替えるとちゃんともとに戻る。

式 (1) の全体の行列のエルミート共役をとって、$\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ の足を入れ替えると、

$$\int d\boldsymbol{r}_3 \check{G}(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_1; i\omega_n)^\dagger (-i\omega_n \delta(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3) - \check{H}(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_2)) = \delta(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \tag{3}$$

$$\int d\boldsymbol{r}_3 \check{G}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3; -i\omega_n)(-i\omega_n \delta(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2) - \check{H}(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_2)) = \delta(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \tag{4}$$

$$\int d\boldsymbol{r}_3 \check{G}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3; i\omega_n)(i\omega_n \delta(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2) - \check{H}(\boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_2)) = \delta(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \tag{5}$$

というもう一つの Gor'kov 方程式が導出できる。ここで、演算子は左に作用すると約束した。また、Green 関数は

$$G_{ij}(x, x', i\omega_n) = \int_0^\beta d(\tau - \tau') e^{i\omega_n(\tau - \tau')} \langle \mathrm{T}_\tau \, \psi_i(x, \tau)\psi_j^\dagger(x', \tau')\rangle \tag{6}$$

と定義されているので、

$$\begin{aligned} G_{ji}(x, x', i\omega_n)^* &= \int_0^\beta d(\tau - \tau') e^{-i\omega_n(\tau - \tau')} \langle \mathrm{T}_\tau \, \psi_i(x', \tau')\psi_j^\dagger(x, \tau)\rangle & (7) \\ &= G_{ij}(x', x, -i\omega_n) & (8) \end{aligned}$$

という関係がなりたっていることを用いた。ここでの ψ_i は南部スピノルである。

1.2 Wigner 表示と Moyal 積

次に、Wigner 表示を導入する事で Gor'kov 方程式がすっきりと書けることを示す。Wigner 表示を、ここでは相対座標に関してのフーリエ変換として定義すると、

$$\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) \equiv \int d\boldsymbol{r}\check{A}\left(\boldsymbol{R}+\frac{\boldsymbol{r}}{2},\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{9}$$

$$\check{A}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \int d\boldsymbol{k}\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{10}$$

である。ここで、重心座標 $\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)/2$ と相対座標 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ を定義した。逆フーリエ変換を

$$\check{A}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) \equiv \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1}e^{-i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2}\check{A}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \tag{11}$$

と定義すると、重心運動量が $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2$、相対運動量が $\boldsymbol{k}=(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)/2$ となり、

$$\check{A}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2) = \int d\boldsymbol{R}\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}} \tag{12}$$

$$\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) = \int d\boldsymbol{q}\check{A}\left(\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2},\boldsymbol{k}-\frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}} \tag{13}$$

が得られる。

この定義を用いて、Green 関数の Wigner 表示に関する方程式を導出する。その際、

$$\check{C}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \int d\boldsymbol{r}_3\check{A}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_3)\check{B}(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_2) \tag{14}$$

の Wigner 表示 $\check{C}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})$ を $\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})$ および $\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})$ で表す表式を導出しておくと便利である。式 (14) の右辺の $\check{A}$,$\check{B}$ をそれぞれ Wigner 表示すると

$$\check{C}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \int d\boldsymbol{r}_3 d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k'}\check{A}\left(\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_3}{2},\boldsymbol{k}\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)}\check{B}\left(\frac{\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_2}{2},\boldsymbol{k'}\right)e^{i\boldsymbol{k'}\cdot(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)} \tag{15}$$

となる。$\boldsymbol{R}$ に関する関数が欲しいので、$\boldsymbol{R}$ を中心としてテイラー展開をすると、

$$\check{A}\left(\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_3}{2},\boldsymbol{k}\right) = \check{A}\left(\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}+\frac{\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2}{2},\boldsymbol{k}\right) \tag{16}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{R}^n}\left(\frac{\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2}{2}\right)^n \tag{17}$$

$$\check{B}\left(\frac{\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_2}{2},\boldsymbol{k'}\right) = \check{B}\left(\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}-\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3}{2},\boldsymbol{k'}\right) \tag{18}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k'})}{\partial\boldsymbol{R}^m}\left(-\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3}{2}\right)^m \tag{19}$$

となる。また、

$$\left(\frac{\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2}{2}\right)^n e^{i\boldsymbol{k'}\cdot(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)} = \left(\frac{1}{2i}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial\boldsymbol{k'}^n}\left[e^{i\boldsymbol{k'}\cdot(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)}\right] \tag{20}$$

$$\left(-\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3}{2}\right)^m e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)} = \left(\frac{-1}{2i}\right)^m\frac{\partial^m}{\partial\boldsymbol{k}^m}\left[e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)}\right] \tag{21}$$

という関係式を使うと、

$$\check{C}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \int d\boldsymbol{r}_3 d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k'}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{m!}\frac{\partial^n\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{R}^n}\left(\frac{1}{2i}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial\boldsymbol{k'}^n}\left[e^{i\boldsymbol{k'}\cdot(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)}\right]\frac{\partial^m\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k'})}{\partial\boldsymbol{R}^m}\left(\frac{-1}{2i}\right)^m\frac{\partial^m}{\partial\boldsymbol{k}^m}\left[e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)}\right] \tag{22}$$

となる。次に、部分積分:

$$\int d\boldsymbol{k}\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\frac{\partial^m}{\partial \boldsymbol{k}^m}\left[e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)}\right] = (-1)^m\int d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)}\frac{\partial^m}{\partial \boldsymbol{k}^m}\left[\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\right] \tag{23}$$

$$\int d\boldsymbol{k}'\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}')\frac{\partial^n}{\partial \boldsymbol{k}'^n}\left[e^{i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)}\right] = (-1)^n\int d\boldsymbol{k}'e^{i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)}\frac{\partial^n}{\partial \boldsymbol{k}'^n}\left[\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}')\right] \tag{24}$$

を使うと、

$$\check{C}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \int d\boldsymbol{r}_3 d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k}'e^{i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2)}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{m!}\frac{\partial^n\partial^m\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{R}^n\partial\boldsymbol{k}'^m}\left(\frac{-1}{2i}\right)^n\frac{\partial^m\partial^n\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}')}{\partial\boldsymbol{R}^m\partial\boldsymbol{k}^n}\left(\frac{1}{2i}\right)^m \tag{25}$$

$$= \int d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k}'\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{m!}\frac{\partial^n\partial^m\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{R}^n\partial\boldsymbol{k}'^m}\left(\frac{-1}{2i}\right)^n(1)^m\frac{\partial^m\partial^n\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}')}{\partial\boldsymbol{R}^m\partial\boldsymbol{k}^n}(1)^n\left(\frac{1}{2i}\right)^m \tag{26}$$

$$= \int d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}\exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}'}-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}'}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\right]\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\check{B}(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{k}')\Big|_{\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}',\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'} \tag{27}$$

$$= \int d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\star\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) \tag{28}$$

となるので、$\check{C}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ の Wigner 表示は

$$\check{C}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) = \check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\star\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) \tag{29}$$

である。ここで、

$$\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\star\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) \equiv \exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}'}-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}'}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\right]\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\check{B}(\boldsymbol{R}',\boldsymbol{k}')\Big|_{\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}',\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'} \tag{30}$$

と定義した積を Moyal 積と呼ぶ[1]。この Moyal 積に時間成分も含まれたものは、量子ボルツマン方程式を導出する際に使われる。

Gor'kov 方程式の Wigner 表示は、式 (1) の両辺を $\boldsymbol{r}$ でフーリエ変換すればよく、

$$(i\omega_n - \check{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}))\star\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) = 1 \tag{31}$$

となる。また、式 (5) は

$$\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\star(i\omega_n - \check{H}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})) = 1 \tag{32}$$

となる。よって、ハミルトニアンの Wigner 表示さえわかればよい。

1.3 ハミルトニアンの Wigner 表示

式 (2) を

$$\check{H}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\check{H}^N(\boldsymbol{r}_2)+\check{\Delta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \tag{33}$$

と分けて考える。このとき、超伝導ギャップの方はただ普通に Wigner 表示すればよい。このとき、$\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})$ のうち $\boldsymbol{k}$ が d 波や p 波の波数依存性を表している。ハミルトニアンには微分演算子が含まれており、ベクトルポテンシャルがなければ多くのモデルで $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{\nabla}$ の積のような項はないので、常伝導ハミルトニアンを

$$\check{H}^N(\boldsymbol{r}_1) = \check{H}^{N0}(\boldsymbol{r}_1)+\check{H}^{N1}(-i\boldsymbol{\nabla}_1) \tag{34}$$

[1] この Moyal 積は文献 [2, 3] において Circle product として定義されているが、指数関数の肩の符号が異なっている。これは、[3] の Appendix にある導出が部分積分 (23) を使わなかったために符号を間違えたことによる。したがって、[2](8) 式は指数関数の肩の符号が逆である。彼らの文献においては Circle product は 0 次までしかとっていないために、この符号の違いは現れず、結果的に得られる Eilenberger 方程式は正しくなっている。

と分ける。このとき、右辺第一項の Wigner 表示は

$$\check{H}^{N0}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) = \int d\boldsymbol{r}\delta(\boldsymbol{r})\check{H}^{N0}\left(\boldsymbol{R}+\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{35}$$

$$= \check{H}^{N0}\left(\boldsymbol{R}\right) \tag{36}$$

となる。右辺第二項は、まずフーリエ変換をすると

$$\check{H}^{N1}\left(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2\right) = \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\check{H}^{N1}\left(-i\boldsymbol{\nabla}_1\right)e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1}e^{-i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2} \tag{37}$$

$$= \int d\boldsymbol{r}_1\check{H}^{N1}\left(\boldsymbol{k}_1\right)e^{i(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}_1} \tag{38}$$

$$= \delta(\boldsymbol{q})\check{H}^{N1}\left(\boldsymbol{k}_1\right) \tag{39}$$

となるので、これを Wigner 表示すると、

$$\check{H}^{N1}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) = \int d\boldsymbol{q}\delta(\boldsymbol{q})\check{H}^{N1}\left(\boldsymbol{k}+\frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}} \tag{40}$$

$$= \check{H}^{N1}\left(\boldsymbol{k}\right) \tag{41}$$

となるので、Gor'kov 方程式は

$$\left[i\omega_n - \check{H}^{N0}(\boldsymbol{R}) - \check{H}^{N1}(\boldsymbol{k}) - \check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\right]\star\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) = 1 \tag{42}$$

となる。

2 準古典近似

式 (42) に近似を施す事で Eilenberger 方程式が得られる。重心座標 $\boldsymbol{R}$ の変動のスケールが小さいとして、Moyal 積を 1 次まで展開すると、

$$\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\star\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) \sim \check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{R}}\cdot\frac{\partial\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{k}} - \frac{\partial\check{A}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\frac{\partial\check{B}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{R}}\right) \tag{43}$$

となる。よって、

$$\check{H}^{N0}(\boldsymbol{R})\star\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) = \check{H}^{N0}(\boldsymbol{R})\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) + \frac{i}{2}\frac{\partial\check{H}^{N0}(\boldsymbol{R})}{\partial\boldsymbol{R}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) \tag{44}$$

$$\check{H}^{N1}(\boldsymbol{k})\star\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) = \check{H}^{N1}(\boldsymbol{k})\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) - \frac{i}{2}\frac{\partial\check{H}(\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) \tag{45}$$

$$\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\star\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) = \check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{R}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) - \frac{\partial\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\right) \tag{46}$$

となる。ここで、超伝導ギャップのエネルギースケールはフェルミエネルギーよりもはるかに小さいと仮定すると ($\Delta \ll E_F$)、その微分である $\frac{\partial\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{k}}$ も極端に波数依存性が大きくなければ値は小さいはずである。よって、式 (46) の第三項は無視してもよい。ここで $\check{H}^{N1}$ はもともと重心座標に依らない項なので、これはエネルギー分散そのもの:

$$\check{H}^{N1}(\boldsymbol{k}) = \xi(\boldsymbol{k})\check{\sigma}_z \tag{47}$$

であり、

$$\frac{\partial\check{H}(\boldsymbol{k})}{\partial\boldsymbol{k}} = \check{\sigma}_z\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}) \tag{48}$$

と群速度で書く事ができる。ここで、$\check{\sigma}_z$ は南部空間に大してのパウリ行列である。以上から、Gor'kov 方程式は

$$\begin{aligned}&\left[i\omega_n - \check{H}^{N0}(\boldsymbol{R}) - \check{H}^{N1}(\boldsymbol{k}) - \check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\right]\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\\&-\frac{i}{2}\frac{\partial \check{H}^{N0}(\boldsymbol{R})}{\partial \boldsymbol{R}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) + \frac{i}{2}\check{\sigma}_z\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k})\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) - \frac{i}{2}\frac{\partial\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{R}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) = 1\end{aligned} \tag{49}$$

となる。この方程式には、$\boldsymbol{R}$ の微分と $\boldsymbol{k}$ の微分が含まれているので、まだ Eilenberger 方程式のような $\boldsymbol{k}$ に関しての独立な方程式になっていない。

次に、式 (5) は

$$\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\star\check{H}^{N0}(\boldsymbol{R}) = \check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\check{H}^{N0}(\boldsymbol{R}) - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\frac{\partial\check{H}^{N0}(\boldsymbol{R})}{\partial \boldsymbol{R}} \tag{50}$$

$$\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\star\check{H}^{N1}(\boldsymbol{k}) = \check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\check{H}^{N1}(\boldsymbol{k}) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\cdot\frac{i}{2}\frac{\partial\check{H}(\boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{k}} \tag{51}$$

$$\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\star\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) = \check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}) - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\cdot\frac{\partial\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{R}} \tag{52}$$

を使って整理できるので、

$$\begin{aligned}&\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\left[i\omega_n - \check{H}^{N0}(\boldsymbol{R}) - \check{H}^{N1}(\boldsymbol{k}) - \check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\right]\\&+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\cdot\frac{\partial\check{H}^{N0}(\boldsymbol{R})}{\partial \boldsymbol{R}} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\cdot\check{\sigma}_z\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}) + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\cdot\frac{\partial\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{R}} = 1\end{aligned} \tag{53}$$

となる。さて、ここで

$$\bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) \equiv \check{\sigma}_z\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) \tag{54}$$

を定義すると、二つの方程式は

$$\begin{aligned}&\left[i\omega_n - \check{H}^{N0}(\boldsymbol{R}) - \check{H}^{N1}(\boldsymbol{k}) - \check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\right]\check{\sigma}_z\bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\\&-\frac{i}{2}\frac{\partial\check{H}^{N0}(\boldsymbol{R})}{\partial \boldsymbol{R}}\check{\sigma}_z\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) + \frac{i}{2}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k})\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}}\bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) - \frac{i}{2}\frac{\partial\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{R}}\check{\sigma}_z\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) = 1\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}&\bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\left[i\omega_n - \check{H}^{N0}(\boldsymbol{R}) - \check{H}^{N1}(\boldsymbol{k}) - \check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\right]\check{\sigma}_z\\&+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\cdot\frac{\partial\check{H}^{N0}(\boldsymbol{R})}{\partial \boldsymbol{R}}\check{\sigma}_z - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}}\bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}) + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\cdot\frac{\partial\check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{R}}\check{\sigma}_z = 1\end{aligned} \tag{56}$$

となる。二つの Gor'kov 方程式の差を取ると、

$$\begin{aligned}&\left[i\omega_n\check{\sigma}_z - \check{H}^{N0}(\boldsymbol{R})\check{\sigma}_z - \check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})\check{\sigma}_z, \bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\right]_-\\&-\frac{i}{2}\left[\frac{\partial\check{H}^{N0}(\boldsymbol{R}) + \check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{R}}\check{\sigma}_z, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n)\right]_+ + i\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k})\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}}\bar{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) = 0\end{aligned} \tag{57}$$

となる。ここで、$[A,B]_\pm \equiv AB \pm BA$ である。

最後に、$\boldsymbol{k}$ の微分を消去したい。そのために

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \propto \frac{\partial}{\partial \xi_{\boldsymbol{k}}} \tag{58}$$

となることに着目する。これは、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を動径方向 k と方向 $\hat{\boldsymbol{k}}$ の二変数で表して、エネルギー分散 $\xi_{\boldsymbol{k}}$ が k の関数であるとして微分を変換したものである。このような微分は、$\xi_{\boldsymbol{k}}$ で積分する事で消去できる。よって、

$$\check{g}(\boldsymbol{R},\hat{\boldsymbol{k}};i\omega_n) \equiv \oint d\xi_{\boldsymbol{k}}\check{\sigma}_z\check{G}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k};i\omega_n) \tag{59}$$

という準古典 Green 関数を定義し、式 (57) の両辺を $\xi_{\boldsymbol{k}}$ で積分すると、

$$\left[i\omega_n\check{\sigma}_z - \check{H}^{N0}(\boldsymbol{R})\check{\sigma}_z - \check{\Delta}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}})\check{\sigma}_z, \check{g}(\boldsymbol{R},\hat{\boldsymbol{k}}_{\mathrm{F}};i\omega_n)\right]_- + i\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}})\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{R}}\check{g}(\boldsymbol{R},\hat{\boldsymbol{k}_{\mathrm{F}}};i\omega_n) = 0 \tag{60}$$

となる。これが Eilenberger 方程式である。ここでフェルミ波数が出てきたのでは、ξ 積分によりフェルミ面近傍の情報が得られたからである。

参考文献

[1] N. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity.* (Clarendon Press, Oxford, 2001).

[2] H. Kusunose, Phys. Rev. B **70**, 054509 (2004).

[3] 麦倉雅敏、東北大学博士論文 (2008)