Ginzburg-Landau 方程式の Eilenberger 方程式からの導出

永井佑紀

平成 25 年 5 月 15 日

Ginzburg-Landau 方程式を微視的に導出する方法の一つとして、Gor'kov 方程式に準古典近似を施して得られた Eilenberger 方程式にさらに近似を施す方法について述べる。この方法は Kopnin の教科書に準じている。

1 準古典近似と Eilenberger 方程式

1.1 Eilenberger 方程式

簡単のため、s 波の超伝導体を考える。このとき、Gor'kov 方程式を準古典近似して得られる Eilenberger 方程式は

$$\check{g}\check{g} = \check{1}, \tag{1}$$

$$-i\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\check{g} - \left[\left(\begin{array}{cc} i\omega_n + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) & -\Delta(r) \\ \Delta^*(r) & -i\omega_n - \frac{e}{c}\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \end{array} \right), \check{g}(r, i\omega_n) \right] = \check{I}, \tag{2}$$

である。ここで、行列表示の準古典 Green 関数 $\check{g}$ は

$$\check{g} = \left(\begin{array}{cc} g & f \\ -f^{\dagger} & -g \end{array} \right) \tag{3}$$

と定義されており、$\check{I}$ は自己エネルギー $\check{\Sigma}$ に関する項で

$$\check{I} = [\check{\Sigma}, \check{g}] \tag{4}$$

である。ここで $[A, B]$ は交換関係 $AB - BA$ である。

準古典近似における s 波超伝導体でのギャップ方程式は

$$\frac{\Delta(\boldsymbol{k})}{\lambda} = \pi i T \sum_n \langle f(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{k}, i\omega_n) \rangle \tag{5}$$

である。ここで、$\langle \cdots \rangle$ はフェルミ面積分であり、λ はフェルミ面上での状態密度とペアリング相互作用の大きさの積 $\lambda = N(0)|v|$ である。なお、n の和は正の無限大から負の無限大までであるが、準古典近似の電子正孔対称性より $n = 0$ から正の無限大まで $\sum_n = 2\sum_{n=0}^{\infty}$ とすることができる。

このギャップ方程式を変形する事で、超伝導ギャップに関する方程式である GL 方程式が導出される。したがって、f を何らかの近似的表式で表すことができればよい。

1.2 自己エネルギー

自己エネルギーとして、Born 近似の自己エネルギーを考える。このとき、

$$\check{\Sigma} = \frac{1}{2\tau} \langle \check{g} \rangle \tag{6}$$

である。ここで τ は不純物の種類等で決まる準粒子の寿命である。このとき、$\check{I}$ は

$$\check{I} = \frac{i}{2\tau}\left(\langle\check{g}\rangle\check{g} - \check{g}\langle\check{g}\rangle\right) \tag{7}$$
$$= \frac{i}{2\tau}\left[\begin{pmatrix} \langle g\rangle g - \langle f\rangle f^\dagger & \langle g\rangle f - \langle f\rangle g \\ -\langle f^\dagger\rangle g + \langle g\rangle f^\dagger & -\langle f^\dagger\rangle f + \langle g\rangle g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g\langle g\rangle - f\langle f^\dagger\rangle & g\langle f\rangle - f\langle g\rangle \\ -f^\dagger\langle g\rangle + g\langle f^\dagger\rangle & -f^\dagger\langle f\rangle + g\langle g\rangle \end{pmatrix}\right] \tag{8}$$
$$= \frac{i}{\tau}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left(\langle f\rangle f^\dagger - f\langle f^\dagger\rangle\right) & \langle g\rangle f - \langle f\rangle g \\ -\langle f^\dagger\rangle g + \langle g\rangle f^\dagger & \frac{1}{2}\left(\langle f\rangle f^\dagger - f\langle f^\dagger\rangle\right) \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる。

1.3 一様解

磁場がかかっていない一様系のときは、式 (2) は簡単に解く事ができて[1]、

$$\tilde{g}_0 = \frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}}, \tag{10}$$
$$\tilde{f}_0 = \frac{\Delta}{i\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}}, \tag{11}$$
$$\tilde{f}_0^\dagger = \frac{\Delta^*}{i\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}}, \tag{12}$$

となる。

2 GL 方程式の導出

2.1 Eilenberger 方程式の摂動展開

T_c 近傍であれば、超伝導ギャップの大きさは小さく、空間変動スケールも長いと考えられる。よって、上記の無磁場で一様な解を無摂動解として、超伝導ギャップの大きさと空間微分に関する摂動を行う。

まず、一様系の準古典 Green 関数を超伝導ギャップ Δ に関して摂動展開すると

$$g \sim 1 - \frac{|\Delta|^2}{2\omega_n^2} \tag{13}$$
$$f \sim \frac{\Delta}{i\omega_n} - \frac{|\Delta|^2\Delta}{2i\omega_n^3} \tag{14}$$
$$f^\dagger \sim \frac{\Delta^*}{i\omega_n} - \frac{|\Delta|^2\Delta^*}{2i\omega_n^3} \tag{15}$$

となる。これは、一様系の準古典 Green 関数からの展開なので、空間微分に関して 0 次の展開と言える。ギャップ方程式 (5) に代入する f について考えると、ギャップに関して 3 次で空間微分に関して 0 次の展開を行っている。同じ次数でそろえる必要があるので、もし空間微分に関して 2 次の展開が欲しいのであれば、その項はギャップに関して 1 次の展開になっていなければならない。

f に関する摂動展開の表式が欲しいので、摂動展開すべき方程式は具体的に書き下すと、

$$-i\boldsymbol{v}_F \cdot \left(\nabla - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right) f - 2i\omega_n f + 2g\Delta - \frac{i}{\tau}\left(\langle g\rangle f - \langle f\rangle g\right) = 0 \tag{16}$$

[1] ノート参照

である。まず、空間微分に関して 1 次の解を求めよう。$f = f_0 + f_1$、$g = g_0 + g_1$ として上記の方程式に代入すると、

$$-i\boldsymbol{v}_F \cdot \left(\nabla - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)(f_0 + f_1) - 2i\omega_n(f_0 + f_1) + 2(g_0 + g_1)\Delta - \frac{i}{\tau}\left(\langle(g_0 + g_1)\rangle(f_0 + f_1) - \langle(f_0 + f_1)\rangle(g_0 + g_1)\right) = 0 \tag{17}$$

となるが、0 次に関しては

$$-2i\omega_n f_0 + 2g_0\Delta - \frac{i}{\tau}\left(\langle g_0\rangle f_0 - \langle f_0\rangle g_0\right) = 0 \tag{18}$$

が成り立っているのでこれを代入することができる。空間微分に関して 2 次以降の項を無視すると、方程式は

$$-i\boldsymbol{v}_F \cdot \left(\nabla - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right) f_0 - 2i\omega_n f_1 + 2g_1\Delta - \frac{i}{\tau}\left(\langle g_0\rangle f_1 - \langle f_0\rangle g_1\right) = 0 \tag{19}$$

となる。ここで、

$$\langle \check{g}\rangle = \check{g}_0 \tag{20}$$

を用いた。これは、等方的フェルミ面を仮定したときに成り立つ。なぜなら、空間微分に関する一次の項 g_1,f_1 は、Eilenberger 方程式が必ず $\boldsymbol{v_F} \cdot \boldsymbol{\nabla}$ と出てくるために $\boldsymbol{v}$ に線形であるために等方的な球状フェルミ面上で積分するとゼロになるためである。なお、g_1 に関しては、状態密度が超伝導ギャップの符号によらないという要請から、超伝導ギャップの偶数次のみを含む。よって、空間微分と超伝導ギャップの両方が一次の場合、$g_1 = 0$ である。ゆえに、f_1 は

$$f_1 = -\frac{\boldsymbol{v}_F \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right) f_0}{2\omega_n + 1/\tau} \tag{21}$$

となる。

次に、二次までの摂動展開を考える、このとき、$f = f_0 + f_1 + f_2$、$g = g_0 + g_1 + g_2$ とすると、方程式は

$$\begin{aligned} &- i\boldsymbol{v}_F \cdot \left(\nabla - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)(f_1 + f_2) - 2i\omega_n(f_0 + f_1 + f_2) + 2(g_0 + g_2)\Delta \\ &- \frac{i}{\tau}\left(\langle(g_0 + g_2)\rangle(f_0 + f_1 + f_2) - \langle(f_0 + f_2)\rangle(g_0 + g_2)\right) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

となる。0 次と 1 次の結果を用いると、

$$-i\boldsymbol{v}_F \cdot \left(\nabla - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right) f_2 - 2i\omega_n f_2 + 2g_2\Delta - \frac{i}{\tau}\left(f_2 - \langle f_2\rangle\right) = 0 \tag{23}$$

となる。先ほどと同様に、空間微分と超伝導ギャップの両方を 1 次までとるので、高次の項である g_2 はゼロとなり、その結果、

$$f_2 = -\frac{\boldsymbol{v}_F \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right) f_1}{2\omega_n + 1/\tau} + \frac{\langle f_2\rangle}{(2\omega_n + 1/\tau)\tau} \tag{24}$$

が得られる。これに式 (21) を代入すると

$$f_2 = \frac{\sum_{i,j}(\boldsymbol{v}_F)_i\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)_i(\boldsymbol{v}_F)_j\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)_j f_0}{(2\omega_n + 1/\tau)^2} + \frac{\langle f_2\rangle}{(2\omega_n + 1/\tau)\tau} \tag{25}$$

となる。

ギャップ方程式に入れるのはフェルミ面平均なので、得られた式のフェルミ面平均をとる。等方的フェルミ面の場合、

$$\langle A\rangle = \int \frac{d\Omega_p}{4\pi}A = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\phi A(\theta, \phi) \tag{26}$$

このとき、フェルミ速度は

$$\boldsymbol{v}_F = v_F(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta) \tag{27}$$

である。フェルミ速度以外は運動量依存していないので、$(\boldsymbol{v}_F)_i(\boldsymbol{v}_F)_j$ が被積分関数となる。そして、球対称なのでどのような軸をとって θ,ϕ を定義してもかまわないので、$(\boldsymbol{v}_F)_z(\boldsymbol{v}_F)_{x,y,z}$ の計算だけをすればよい。これらは

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (\boldsymbol{v}_F)_z(\boldsymbol{v}_F)_x = v_F^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos\theta\cos\phi\sin^2\theta = 0 \tag{28}$$

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (\boldsymbol{v}_F)_z(\boldsymbol{v}_F)_y = v_F^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos\theta\sin\phi\sin^2\theta = 0 \tag{29}$$

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (\boldsymbol{v}_F)_z(\boldsymbol{v}_F)_z = v_F^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta\cos^2\theta = \frac{4\pi}{3} v_F^2 \tag{30}$$

となるので、

$$\langle (\boldsymbol{v}_F)_i(\boldsymbol{v}_F)_j \rangle = \frac{v_F^2}{3}\delta_{ij} \tag{31}$$

が得られる。ゆえに、

$$\langle f_2 \rangle = \frac{v_F^2\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 f_0}{3(2\omega_n + 1/\tau)^2} + \frac{\langle f_2 \rangle}{(2\omega_n + 1/\tau)\tau} \tag{32}$$

$$\langle f_2 \rangle = \frac{\tau v_F^2\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 f_0}{3(2\omega_n\tau + 1)2\omega_n} \tag{33}$$

となる。さらに、$f_0 = \Delta/(i\omega_n)$ と Diffusion constant として $D \equiv v_F^2\tau/3$ を用いると

$$\langle f_2 \rangle = -iD\frac{\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 \Delta}{(2\omega_n\tau + 1)2\omega_n^2} \tag{34}$$

となる。

以上から、準古典異常 Green 関数のフェルミ面平均は

$$\langle f \rangle \sim \frac{\Delta}{i\omega_n} - \frac{|\Delta|^2\Delta}{2i\omega_n^3} - iD\frac{\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 \Delta}{(2\omega_n\tau + 1)2\omega_n^2} \tag{35}$$

となる。なお、一次の項がないのは、$\langle f_1 \rangle = 0$ だからである。この式をギャップ方程式 (5) に代入する事で GL 方程式を導出できる。

2.2 ギャップ方程式への代入

ギャップ方程式 (5) に式 (35) を代入すると

$$\frac{\Delta(\boldsymbol{r})}{\lambda} = 2\pi T\Delta \sum_{n=0}^{N_0(T)} \frac{1}{\omega_n} - \pi T|\Delta|^2\Delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^3} + \pi T D\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 \Delta(\boldsymbol{r}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\omega_n\tau + 1)\omega_n^2} \tag{36}$$

となる。ここで、$1/\omega_n$ の松原の和は BCS 理論では発散するので、カットオフ $N_0(T) = \Omega_{BCS}/2\pi T$ を導入した。また、松原振動数は $\omega_n = \pi T(2n+1)$ なので、

$$\frac{\Delta(\boldsymbol{r})}{\lambda} = 2\pi T\Delta \sum_{n=0}^{N_0(T)} \frac{1}{\omega_n} - \frac{|\Delta|^2\Delta}{8\pi^2 T^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1/2)^3} + \frac{D}{\pi T}\left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 \Delta(\boldsymbol{r}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi T(2n+1)\tau + 1)(2n+1)^2} \tag{37}$$

となる。さらに、リーマンの $\zeta(z)$ 関数に関する公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1/2)^z} = (2^z - 1)\zeta(z) \tag{38}$$

$$\zeta(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{39}$$

を用いると、右辺第二項が

$$\frac{1}{8\pi^2 T^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1/2)^3} = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T^2} \tag{40}$$

となる。右辺第三項は、clean な超伝導体を考える $(T\tau \gg 1)$ ことで

$$\frac{1}{\pi T} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi T(2n+1)\tau + 1)(2n+1)^2} \sim \frac{1}{2\pi^2 T^2 \tau 2^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1/2)^3} \tag{41}$$

$$= \frac{1}{8} \frac{7\zeta(3)}{2\pi^2 T^2 \tau} \tag{42}$$

と近似できる。これらを代入すると、

$$\frac{\Delta(\boldsymbol{r})}{\lambda} = 2\pi T \Delta \sum_{n=0}^{N_0(T)} \frac{1}{\omega_n} - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T^2} |\Delta|^2 \Delta + \frac{D}{8} \frac{7\zeta(3)}{2\pi^2 T^2 \tau} \left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{2ie}{c} \boldsymbol{A} \right)^2 \Delta(\boldsymbol{r}) \tag{43}$$

となる。

右辺第一項の計算は、T_c でのバルクのギャップ方程式を用いる。つまり、式 (5) に f_0 を代入すると

$$\frac{\Delta}{\lambda} = 2\pi T \sum_{n=0}^{N_0(T)} \frac{\Delta}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \tag{44}$$

となり、さらに $\Delta = 0$ を代入すると

$$\frac{1}{\lambda} = 2\pi T_c \sum_{n=0}^{N_0(T_c)} \frac{1}{\omega_n} \tag{45}$$

となる。また、カットオフの値は $N_0(T_c) > N_0(T)$ であるので、

$$2\pi T \sum_{n=0}^{N_0(T)} \frac{1}{\omega_n} = 2\pi T \sum_{n=0}^{N_0(T_c)} \frac{1}{\omega_n} + 2\pi T \sum_{N_0(T_c)}^{N_0(T)} \frac{1}{\omega_n} \tag{46}$$

$$= \frac{1}{\lambda} + 2\pi T \sum_{N_0(T_c)}^{N_0(T)} \frac{1}{\omega_n} \tag{47}$$

となる。右辺第二項は、適当な超伝導関連の文献を見ると

$$2\pi T \sum_{N_0(T_c)}^{N_0(T)} \frac{1}{\omega_n} \sim \ln\left(\frac{T_c}{T}\right) \tag{48}$$

となることがわかる。

最後に、$T \sim T_c$ のときに超伝導ギャップが小さいことを考えると、

$$\ln\left(\frac{T_c}{T}\right) \sim 1 - \frac{T}{T_c} \tag{49}$$

となり、方程式は

$$\left(1-\frac{T}{T_c}\right)\Delta-\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2T_c^2}|\Delta|^2\Delta+\frac{\pi\tilde{D}}{8T_c}\left(\boldsymbol{\nabla}-\frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\Delta(\boldsymbol{r})=0 \tag{50}$$

となる。これが GL 方程式である。ここで、

$$\tilde{D}\equiv\frac{7\zeta(3)v_F^2}{6\pi^3T_c} \tag{51}$$

と定義した。

参考文献

N. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity.* (Clarendon Press, Oxford, 2001).