Matrix Riccati 方程式

永井佑紀

平成 17 年 11 月 28 日

singlet-pairing の超伝導体において、2×2 の Eilenberger 方程式は 2 本の Scalar Riccati 方程式に変形することができた。triplet-pairing の超伝導体においては pair-potential が 2×2 の spin-matrix を持ち、Eilenberger 方程式は 4×4 の方程式になる。このとき、Riccati 方程式は 2×2 の方程式になる。このノートでは、Matrix Riccati 方程式を導出することを目的とする。

11 月 28 日追記：Green 関数の符号を間違って定義していたため修正。

1 Eilenberger 方程式

singlet-pairing の場合の Eilenberger 方程式は

$$-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n) = \left[\begin{pmatrix} i\omega_n+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) & -\Delta(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}) \\ \Delta^*(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}) & -i\omega_n-\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix},\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)\right] \tag{1}$$

と書けた。triplet-pairing の場合も同様の議論で

$$-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n) = \left[\begin{pmatrix} \left(i\omega_n+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)\hat{\sigma}_0 & -\hat{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}) \\ \hat{\Delta}^\dagger(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}) & \left(-i\omega_n-\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)\hat{\sigma}_0 \end{pmatrix},\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)\right] \tag{2}$$

となる。ここで、

$$\hat{\Delta} = i(\boldsymbol{d}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})\hat{\sigma}_y \tag{3}$$

$$= \begin{pmatrix} -d_x+id_y & d_z \\ d_z & d_x+id_y \end{pmatrix} \tag{4}$$

であり、$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ は Pauli 行列を成分としたベクトルである。triplet-pairing の Gor'kov 方程式が形式的に singlet-pairing の場合と変わらないため、Eilenberger 方程式の導出を同様の議論でできるのである。

以下の議論では、座標系を

$$\boldsymbol{v}_F = v_F(\cos\theta\hat{\boldsymbol{a}}+\sin\theta\hat{\boldsymbol{b}}) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{r}(x) = r_a\hat{\boldsymbol{a}}+r_b\hat{\boldsymbol{b}} \tag{6}$$

$$= x\hat{\boldsymbol{v}}+y\hat{\boldsymbol{u}} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{v}} \\ \hat{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{a}} \\ \hat{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix} \tag{8}$$

ととる。ここで x および y が以下の θ に依存している。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_a \\ r_b \end{pmatrix} \tag{9}$$

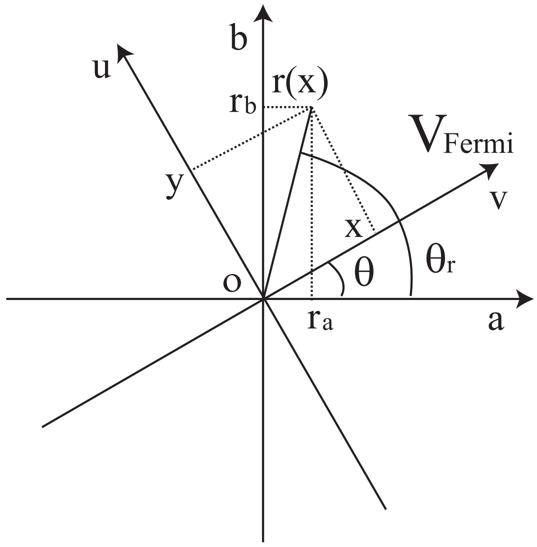

図 1: 座標の定義

このとき、$\boldsymbol{v}$ 方向の Eilenberger 方程式は

$$i v_F \cdot \nabla \check{g}(\theta, \boldsymbol{r}; i\omega_n) + \left[\begin{pmatrix} i\bar{\omega}_n \hat{\sigma}_0 & -\hat{\Delta}(\theta, \boldsymbol{r}) \\ -\bar{\hat{\Delta}}(\theta, \boldsymbol{r}) & -i\bar{\omega}_n \hat{\sigma}_0 \end{pmatrix}, \check{g}(\theta, \boldsymbol{r}; i\omega_n) \right] = 0 \tag{10}$$

と書くことができ、規格化条件は

$$\check{g}\check{g} = \check{1} \tag{11}$$

である。ここで簡単のため

$$i\bar{\omega}_n \equiv i\omega_n + \frac{e}{c} \boldsymbol{v}_F \cdot \boldsymbol{A} \tag{12}$$

$$\bar{\hat{\Delta}} = -\hat{\Delta}^\dagger \tag{13}$$

とした。

また、singlet-pairing の場合の Riccati 方程式 [3] は

$$v_F \frac{\partial}{\partial x} a_+(\theta, x, y; i\omega_n) + [2\bar{\omega}_n + \Delta^* a_+] a_+ - \Delta = 0 \tag{14}$$

$$v_F \frac{\partial}{\partial x} b_-(\theta, x, y; i\omega_n) - [2\bar{\omega}_n + \Delta b_-] b_- + \Delta^* = 0 \tag{15}$$

である。

2 Projectors

Eilenberger 方程式から Riccati 方程式を導出するために、Eschrig[7] の方法を用いることにする。

2.1 Projectors の定義

まず、4×4 の行列で表現される[1]以下の projector を導入する：

$$\check{P}_\pm = \frac{1}{2} \left(\check{1} \mp \check{g} \right) \tag{16}$$

[1] $\check{A}$ のように check がついているものは 4×4 の行列であるとする。

この行列が

$$\begin{aligned}
\check{P}_{\pm}\cdot\check{P}_{\pm} &= \check{P}_{\pm} && (17)\\
\check{P}_{+}\cdot\check{P}_{-} &= \check{P}_{-}\cdot\check{P}_{+}=\check{0} && (18)\\
\check{P}_{+}+\check{P}_{-} &= \check{1} && (19)\\
\check{g} &= \check{P}_{-}-\check{P}_{+} && (20)\\
&= -(2\check{P}_{+}-\check{1})=-(\check{1}-2\check{P}_{-}) && (21)
\end{aligned}$$

を満たすことは容易に確かめられる[2]。この projector を Eilenberger 方程式に代入すると、

$$iv_F\cdot\nabla\check{P}_{\pm}+\left[\begin{pmatrix} i\bar{\omega}_n\hat{\sigma}_0 & -\hat{\Delta}(\theta,\boldsymbol{r}) \\ -\bar{\hat{\Delta}}(\theta,\boldsymbol{r}) & -i\bar{\omega}_n\hat{\sigma}_0 \end{pmatrix},\check{P}_{\pm}\right]=0 \tag{22}$$

となる。

2.2 $\hat{a}_+$ 及び $\hat{b}_-$ の導入

次に、spin matrix を持つ 2×2 の行列 $\hat{a}_+$、$\hat{b}_-$ を導入する[3]。$\check{P}_{\pm}$ を

$$\begin{aligned}
\check{P}_{+} &= \begin{pmatrix}\hat{1}\\ -\hat{b}_-\end{pmatrix}(\hat{1}-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}(\hat{1},\hat{a}_+) && (23)\\
\check{P}_{-} &= \begin{pmatrix}-\hat{a}_+\\ \hat{1}\end{pmatrix}(\hat{1}-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}(\hat{b}_-,\hat{1}) && (24)
\end{aligned}$$

と置けば、最初に定義した $\check{P}_{\pm}$ の性質のうち $\check{P}_{\pm}\cdot\check{P}_{\pm}=\check{P}_{\pm}$、$\check{P}_{+}\cdot\check{P}_{-}=\check{P}_{-}\cdot\check{P}_{+}=\check{0}$ を満たしている。ここで

$$\check{P}_{+}+\check{P}_{-}=\begin{pmatrix} -\hat{a}_+(\hat{1}-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}\hat{b}_-+(\hat{1}-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1} & -\hat{a}_+(\hat{1}-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}+(\hat{1}-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_+ \\ (\hat{1}-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}\hat{b}_--\hat{b}_-(\hat{1}-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1} & (\hat{1}-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}-\hat{b}_-(\hat{1}-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_+ \end{pmatrix} \tag{25}$$

であるから、$\check{P}_{+}+\check{P}_{-}=\check{1}$ を満たすためには

$$(\hat{1}-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_+=\hat{a}_+(\hat{1}-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1} \tag{26}$$

という関係があればよい。

2.3 Matrix Riccati 方程式

式 (22) に式 (23) を代入して計算すると、$\hat{a}_+$ と $\hat{b}_-$ に関する方程式を得ることができる。
逆行列の微分が

$$\frac{d}{dx}\hat{A}^{-1}(x)=-\hat{A}^{-1}(x)\frac{d}{dx}\hat{A}(x)\hat{A}^{-1}(x) \tag{27}$$

となることに注意して、式を計算して整理すると

$$\begin{aligned}
&iv_F\begin{pmatrix} -(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}(-\nabla(\hat{a}_+\hat{b}_-))(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1} & -(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}(-\nabla(\hat{a}_+\hat{b}_-))(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_+ \\ \hat{b}_-(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}(-\nabla(\hat{a}_+\hat{b}_-))(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1} & (1-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}(-\nabla(\hat{b}_-\hat{a}_+))(1-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}\hat{b}_-\hat{a}_+ \end{pmatrix}\\
&+iv_F\begin{pmatrix} 0 & (1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\nabla\hat{a}_+ \\ -\nabla\hat{b}_-(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1} & -(1-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}\nabla(\hat{b}_-\hat{a}_+) \end{pmatrix}\\
&+\begin{pmatrix} \hat{\Delta}\hat{b}_-(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1} & 2i\bar{\omega}_n(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_+ \\ -\bar{\hat{\Delta}}(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}-\hat{b}_-(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_+\bar{\hat{\Delta}} & -\bar{\hat{\Delta}}(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_+ \end{pmatrix}\\
&+\begin{pmatrix} (1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_+\bar{\hat{\Delta}} & \hat{\Delta}\hat{b}_-(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_++(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{\Delta} \\ 2i\bar{\omega}_n\hat{b}_-(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1} & -\hat{b}_-(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{\Delta} \end{pmatrix}=\check{0}
\end{aligned} \tag{28}$$

[2]規格化条件 $\check{g}\check{g}=\check{1}$ を用いる。
[3]$\hat{A}$ のように hat がついているものは 2×2 の spin matrix を持つ行列だとする。

となる。右上の行列要素に着目して、左上の行列要素の関係式を代入して整理すると、

$$iv_F\nabla\hat{a}_+ + 2i\bar{\omega}_n\hat{a}_+ - \hat{a}_+\bar{\hat{\Delta}}\hat{a}_+ + \hat{\Delta} = 0 \tag{29}$$

となり、左下の行列要素に着目して、左上の行列要素の関係式を代入して整理すると

$$iv_F\nabla\hat{b}_- - 2i\bar{\omega}_n\hat{b}_- - \hat{b}_-\hat{\Delta}\hat{b}_- + \bar{\hat{\Delta}} = 0 \tag{30}$$

となる。これらが Matrix Riccati 方程式である [6, 7]。
　また、$\check{g} = \check{P}_- - \check{P}_+$ であるから、

$$\begin{aligned}
\check{g} &= -\begin{pmatrix} \hat{a}_+(\hat{1}-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}\hat{b}_- + (\hat{1}-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1} & \hat{a}_+(\hat{1}-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1} + (\hat{1}-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_+ \\ -(\hat{1}-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}\hat{b}_- - \hat{b}_-(\hat{1}-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1} & -(\hat{1}-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1} - \hat{b}_-(\hat{1}-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_+ \end{pmatrix} && (31) \\
&= -\begin{pmatrix} (1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}(\hat{1}+\hat{a}_+\hat{b}_-) & 2(1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1}\hat{a}_+ \\ -2(1-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}\hat{b}_- & -(1-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1}(\hat{1}+\hat{b}_-\hat{a}_+) \end{pmatrix} && (32) \\
&= -\begin{pmatrix} (1-\hat{a}_+\hat{b}_-)^{-1} & 0 \\ 0 & (1-\hat{b}_-\hat{a}_+)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\hat{1}+\hat{a}_+\hat{b}_-) & 2\hat{a}_+ \\ -2\hat{b}_- & -(\hat{1}+\hat{b}_-\hat{a}_+) \end{pmatrix} && (33)
\end{aligned}$$

となる。ここで、式 (26) を用いた。

3　Scalar Riccati 方程式と Matrix Riccati 方程式の比較

　Scalar Riccati 方程式は

$$\begin{aligned}
v_F\frac{\partial}{\partial x}a_+(\theta,x,y;i\omega_n) + [2\bar{\omega}_n + \Delta^* a_+]\,a_+ - \Delta &= 0 && (34) \\
v_F\frac{\partial}{\partial x}b_-(\theta,x,y;i\omega_n) - [2\bar{\omega}_n + \Delta b_-]\,b_- + \Delta^* &= 0 && (35)
\end{aligned}$$

であり、Matrix Riccati 方程式は

$$\begin{aligned}
iv_F\nabla\hat{a}_+ + 2i\bar{\omega}_n\hat{a}_+ - \hat{a}_+\bar{\hat{\Delta}}\hat{a}_+ + \hat{\Delta} &= 0 && (36) \\
iv_F\nabla\hat{b}_- - 2i\bar{\omega}_n\hat{b}_- - \hat{b}_-\hat{\Delta}\hat{b}_- + \bar{\hat{\Delta}} &= 0 && (37)
\end{aligned}$$

である。Matrix Riccati 方程式において、$\hat{a}_+ \to i\hat{a}_+$、$\hat{b}_- \to i\hat{b}_-$ と置きなおし、$\bar{\hat{\Delta}} = -\Delta^\dagger$ であることに注意すれば、

$$\begin{aligned}
v_F\nabla\hat{a}_+ + 2\bar{\omega}_n\hat{a}_+ + \hat{a}_+\hat{\Delta}^\dagger\hat{a}_+ - \hat{\Delta} &= 0 && (38) \\
v_F\nabla\hat{b}_- - 2\bar{\omega}_n\hat{b}_- - \hat{b}_-\hat{\Delta}\hat{b}_- + \hat{\Delta}^\dagger &= 0 && (39)
\end{aligned}$$

となり、Scalar Riccati 方程式の変数を行列に変更したのと形式的に同じになる。このように書くことによって、Scalar Riccati 方程式を解くときと同様な手法を用いることが可能になる。

参考文献

[1] Nikolai Kopnin.”Theory of Nonequilibrium Superconductivity” (Oxford Science Publications) .

[2] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I.E. Dzyaloshinski ”Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics” (Dover).

[3] 植野洋介、東京大学修士論文 (2002).

[4] Nils Schopohl. "Transformation of the Eilenberger Equation of Superconductivity to Scalar Riccati Equation" (Quasiclassical Methods in Superconductivity & Superfluidity;Verditz 96).

[5] M. Sigrist and K. Ueda, "Phenomenological theory of unconventional superconductivity", Rev. Mod. Phys. **63** (1991).

[6] A. B. Vorontsov, J. A. Sauls, Phys. Rev. B **68**, 064508 (2003).

[7] M. Eschrig, Phys. Rev. B **61**, 9061 (2000).