

Kramer-Pesch 近似

永井佑紀

平成 17 年 11 月 10 日

Kramer-Pesch 近似を Riccati Formalizm に適用することによって、十分低いエネルギー領域 ($|\omega_n| \ll |\Delta_\infty|$) における準古典 Green 関数の表式を求める。もう少し具体的に言えば、Riccati 方程式を ω_n と y で展開してそれぞれに関して一次までの表式を求めることになる。

1 座標系

空間は二次元として、前のノートと同じ座標系を用いる。空間座標の記号に関しては以下のように定義する (図.1)

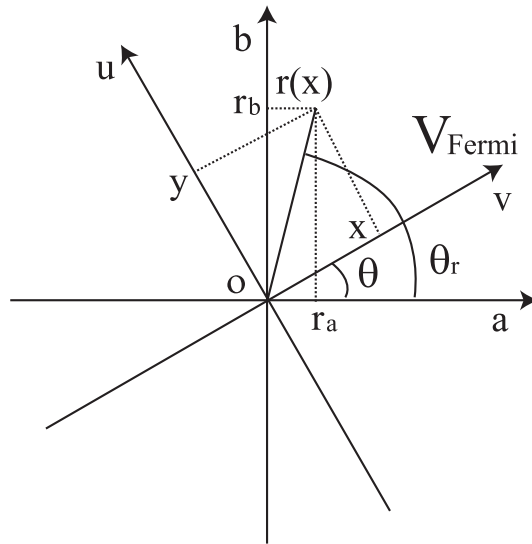


図 1: 座標の定義

$$\mathbf{v}_F = v_F (\cos \theta \hat{\mathbf{a}} + \sin \theta \hat{\mathbf{b}}) \quad (1)$$

$$\mathbf{r}(x) = r_a \hat{\mathbf{a}} + r_b \hat{\mathbf{b}} \quad (2)$$

$$= x \hat{\mathbf{v}} + y \hat{\mathbf{u}} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで x および y に依存していることに注意:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_a \\ r_b \end{pmatrix} \quad (5)$$

2 Kramer-Pesch 近似とは

Kramer-Pesch 近似とは、Vortec 周りの低エネルギースペクトルを求めるための近似である。

いま、座標系は、準粒子の進行方向を x 軸にとり、それに垂直に y 軸をとっている。このとき原点には Vortex の中心があるとしている。つまり、 $y = 0$ のときは Vortex の中心を通り抜けていく準粒子の経路を考えている。準粒子は $\Delta(r)$ より大きいエネルギーに存在する。十分に遠方では一様な系となるから、準粒子は $E > \Delta_\infty$ のエネルギー領域に存在する。Vortex core 近傍では、 Δ は小さくなり、それにより準粒子励起に必要なエネルギーも小さくなる。Vortex core 中心では $\Delta = 0$ である。

今、十分低いエネルギー領域 ($|\omega_n| \ll |\Delta_\infty|$) を考えたい。このエネルギー領域は Vortex core 近傍、つまり $x, y \ll \xi_0$ にあると考えられる。したがって、Vortex core を少しはずれた準粒子の経路を考えればよいので、 y で摂動展開することができる。また、低エネルギー領域なので ω_n でも摂動展開ができる。以上から、Riccati 方程式を ω_n と y で展開し、それぞれに関して一次までの表式を求めればよいことになる。

2.1 pair-potential

一般の pair-potential を

$$\Delta(\theta, x, y) = |\Delta(r)|e^{i\theta r} f(\theta) \quad (6)$$

とおく。ここで、 $e^{i\theta r}$ は pair-potential の位相部分であり、 $f(\theta)$ は異方性を表している。s 波では $f(\theta) = 1$ 、それ以外では $f(\theta) \neq 1$ である。このように置くことで、あらゆる対称性の pair-potential を扱うことができる。また、位相部分は以降の計算において本質的な役割を持たない。したがって以下では

$$\Delta(\theta, x, 0) \rightarrow \Delta(\theta, x) = \text{sign}(x)|\Delta(r)|f(\theta) \quad (7)$$

とする。これは、 $x > 0$ と $x < 0$ では位相が π 違うことを表している。このようにして $a(x, y)$ 、 $b(x, y)$ を求め、最後に

$$a(x, y) \rightarrow a^{\text{true}}(x, y) = a(x, y)e^{i\theta r} \quad (8)$$

$$b(x, y) \rightarrow b^{\text{true}}(x, y) = b(x, y)e^{-i\theta r} \quad (9)$$

とすることによって真の解を得ることができる。したがって、 a_+ 、 b_- によって構成された Green 関数はそれぞれ

$$g_3(\theta, x, y; i\omega_n) \rightarrow g_3^{\text{true}}(\theta, x, y; i\omega_n) = g_3 \quad (10)$$

$$g_+(\theta, x, y; i\omega_n) \rightarrow g_+^{\text{true}}(\theta, x, y; i\omega_n) = g_+ \cdot e^{i\theta r} \quad (11)$$

$$g_-(\theta, x, y; i\omega_n) \rightarrow g_-^{\text{true}}(\theta, x, y; i\omega_n) = g_- \cdot e^{-i\theta r} \quad (12)$$

とすればよいことがわかる。

また、 ω_n 、 y に依存するすべての量を

$$a(\theta, x, y; i\omega_n) = a_0 + a_1 \quad (13)$$

$$b(\theta, x, y; i\omega_n) = b_0 + b_1 \quad (14)$$

$$\Delta(\theta, x, y) = \Delta_0 + \Delta_1 \quad (15)$$

$$\omega_n = 0 + \omega_n \quad (16)$$

$$y = 0 + y \quad (17)$$

のように 0 次と 1 次の項に分け、Riccati 方程式に代入すると

$$v_F \frac{\partial}{\partial x} (a_0 + a_1) + 2\omega_n (a_0 + a_1) + (\Delta_0^* + \Delta_1^*) (a_0 + a_1) (a_0 + a_1) - (\Delta_0 + \Delta_1) = 0 \quad (18)$$

$$v_F \frac{\partial}{\partial x} (b_0 + b_1) - 2\omega_n (b_0 + b_1) - (\Delta_0 + \Delta_1) (b_0 + b_1) (b_0 + b_1) + (\Delta_0^* + \Delta_1^*) = 0 \quad (19)$$

となる。

ここで、 $\Delta(\theta, x, y)$ の展開の具体的な表式を求めておく。 $\theta_r = \varphi + \theta$ とする。図.1 と座標の定義から

$$\Delta(\theta, x, y) = |\Delta(r)|e^{i(\varphi+\theta)}f(\theta) \quad (20)$$

$$= |\Delta(r)|e^{i\theta}(\cos \varphi + i \sin \varphi)f(\theta) \quad (21)$$

$$= |\Delta(r)|e^{i\theta} \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2}}f(\theta) \quad (22)$$

とすることができる。これを y に関して 1 次までテイラー展開すると

$$\Delta(\theta, x, y) \sim |\Delta(r)|e^{i\theta}f(\theta) \left[\frac{x}{|x|} + i \frac{y}{|x|} \right] \quad (23)$$

$$= |\Delta(r)|e^{i\theta}f(\theta) \left[\text{sign}(x) + \text{sign}(x)i \frac{y}{x} \right] \quad (24)$$

$$= \Delta(\theta, x) + i \frac{y}{x} \Delta(\theta, x) \quad (25)$$

となる。

2.2 0 次の Riccati 方程式の解

式 (18)、式 (19) から、0 次の項のみを抜き出すと

$$v_F \frac{\partial}{\partial x} a_0(\theta, x, y = 0) = \Delta_0(\theta, x) \{1 - a_0^2\} \quad (26)$$

$$v_F \frac{\partial}{\partial x} b_0(\theta, x, y = 0) = -\Delta_0(\theta, x) \{1 - b_0^2\} \quad (27)$$

となる。ここで、式 (7) より $\Delta_0 = \Delta_0^*$ となることを用いた。これは非線型方程式であるが、

$$a_0(\theta, x, y = 0) = \tanh(u(\theta, x) + C_a) \quad (28)$$

$$u(\theta, x) \equiv \frac{1}{v_F} \int_0^x dx' \text{sign}(x') |\Delta(x')| f(\theta) \quad (29)$$

$$= \frac{1}{v_F} \int_0^{|x|} dx' \Delta(\theta, x') \quad (30)$$

と解かれることがわかっている。さらに境界条件として、

$$a_0(\theta, x_a, y = 0) = \frac{\Delta(\theta, x_a)}{0 + \sqrt{0^2 + |\Delta_0|^2}} \quad (31)$$

$$= \frac{\Delta(\theta, x_a)}{|\Delta(\theta, x_a)|} \quad (32)$$

$$= \text{sign}(x_a) \text{sign}(f(\theta)) \quad (33)$$

$$= \text{sign}(x_a f(\theta)) \quad (34)$$

を課す。これは、 x_a において一様な状態に移行するという境界条件である。このようにすると、積分定数は

$$C_a = \text{arctanh}(\text{sign}(x_a f(\theta))) - u(x_a) \quad (35)$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \text{sign}(x_a f(\theta))}{1 - \text{sign}(x_a f(\theta))} - u(x_a) \quad (36)$$

となり、 $\text{sign}(x_a f(\theta))$ が ± 1 のとき $\pm \infty$ となる。したがって、式 (28) に代入すると、

$$a_0(\theta, x, y = 0) = \text{sign}(x_a f(\theta)) \quad (37)$$

となる。

b_0 も同様に解く事ができて、

$$b_0(\theta, x, y = 0) = \text{sign}(x_a f(\theta)) \quad (38)$$

となる。

2.3 1 次の Riccati 方程式の解

式 (18)、式 (19) から、1 次の項のみを抜き出すと

$$v_F \frac{\partial}{\partial x} a_1(\theta, x, y) + 2\Delta(\theta, x)a_0a_1 = i\frac{y}{x}\Delta(\theta, x)(a_0^2 + 1) - 2\omega_n a_0 \quad (39)$$

$$v_F \frac{\partial}{\partial x} b_1(\theta, x, y) - 2\Delta(\theta, x)b_0b_1 = i\frac{y}{x}\Delta(\theta, x)(b_0^2 + 1) + 2\omega_n b_0 \quad (40)$$

となる。これらの微分方程式は非同次一階微分方程式であるから、右辺を零としたときの同次形の微分方程式の解

$$a_1^{(0)}(\theta, x, y) = C e^{-2a_0 u(\theta, x)} \quad (41)$$

を利用し、境界条件も考慮すると

$$a_1(\theta, x, y) = \frac{2}{v_F} \int_{x_a}^x dx' \left\{ -\omega_n a_0 + i\frac{y}{x'}\Delta(\theta, x') \right\} e^{2a_0 u(\theta, x')} \cdot e^{-2a_0 u(\theta, x)} \quad (42)$$

となる。 b_1 も同様に解く事ができて

$$b_1(\theta, x, y) = \frac{2}{v_F} \int_{x_a}^x dx' \left\{ \omega_n b_0 + i\frac{y}{x'}\Delta(\theta, x') \right\} e^{-2b_0 u(\theta, x')} \cdot e^{2b_0 u(\theta, x)} \quad (43)$$

となる。

2.4 Green 関数

工事中。

参考文献

- 高野文彦、「多体問題」(培風館 新物理学シリーズ 18)
- J. M. ザイマン、「現代量子論の基礎」(丸善プラネット株式会社)
- Richard D. Mattuck. "A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem" 2nd (Dover)
- Nikolai Kopnin."Theory of Nonequilibrium Superconductivity" (Oxford Science Publications)
- A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I.E. Dzyaloshinski "Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics" (Dover)
- 植野洋介、東京大学修士論文 (2002)
- Nils Schopohl. "Transformation of the Eilenberger Equation of Superconductivity to Scalar Riccati Equation" (Quasiclassical Methods in Superconductivity & Superfluidity;Verditz 96)