Scalar Riccati 方程式

永井佑紀

平成 17 年 10 月 27 日

Eilenberger 方程式を Riccati 方程式の形式:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \tag{1}$$

に書き換える。この微分方程式のひとつの解 $f(x)$ がわかった場合、

$$y = f(x) + \frac{1}{u} \tag{2}$$

とおくと、u に関する線形微分方程式を得る。非線形微分方程式の解を線形微分方程式を解くことで得られるので、Riccati 方程式は有用である。導出した Riccati 方程式を磁場のない一様な系で解き、得られる準古典 Green 関数が以前求めた結果に一致することを示す。

ここでは空間を 2 次元として議論する。

1 座標系

空間座標の記号に関しては以下のように定義する (図.1)

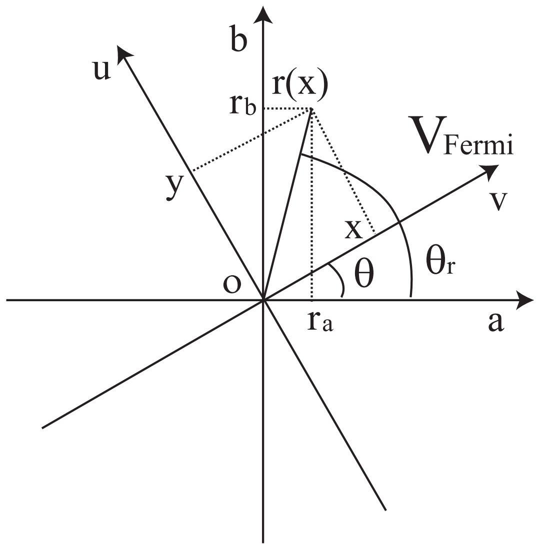

図 1: 座標の定義

$$\boldsymbol{v}_F = v_F(\cos\theta\hat{\boldsymbol{a}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{b}}) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{r}(x) = r_a\hat{\boldsymbol{a}} + r_b\hat{\boldsymbol{b}} \tag{4}$$

$$= x\hat{\boldsymbol{v}} + y\hat{\boldsymbol{u}} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{v}} \\ \hat{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{a}} \\ \hat{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

ここで x および y が θ に依存していることに注意：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_a \\ r_b \end{pmatrix} \tag{7}$$

2　行列の定義

行列 $K_\pm$、K_3 を

$$K_+ \equiv -\frac{i}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) \tag{8}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$K_- \equiv -\frac{i}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) \tag{10}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$K_3 \equiv \frac{1}{2}\sigma_z \tag{12}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

のように定義する。これらは

$$[K_+, K_-] = -2K_3 \tag{14}$$

$$[K_3, K_\pm] = \pm K_\pm \tag{15}$$

という交換関係を満たす。また、次のような関係式

$$\left[K_3, e^{CK_\pm}\right] = \pm CK_\pm e^{CK_\pm} \tag{16}$$

$$\left[K_\pm, e^{CK_3}\right] = (e^{\mp C} - 1)e^{CK_3}K_\pm \tag{17}$$

$$\left[K_-, e^{CK_+}\right] = 2Ce^{CK_+}K_3 + C^2K_+e^{CK_+} \tag{18}$$

$$\left[K_+, e^{CK_-}\right] = -2Ce^{CK_-}K_3 + C^2K_-e^{CK_-} \tag{19}$$

を導いておくと便利である。

3　Eilenberger 方程式を満たす解

前節の行列を用いると、Eilenberger 方程式は

$$-i\boldsymbol{v}_F \cdot \nabla\check{g}(\theta, \boldsymbol{r}; i\omega_n) = \left[\begin{pmatrix} i\omega_n + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) & -\Delta(\theta, \boldsymbol{r}) \\ \Delta^*(\theta, \boldsymbol{r}) & -i\omega_n - \frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}, \check{g}(\theta, \boldsymbol{r}; i\omega_n)\right] \tag{20}$$

$$= [2i\bar{\omega}_n K_3 - i\Delta K_+ + i\Delta^* K_-, \check{g}] \tag{21}$$

と書くことができる。ここで簡単のため

$$i\bar{\omega}_n \equiv i\omega_n + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F \cdot \boldsymbol{A} \tag{22}$$

とした[1]。

今、次の微分方程式に従う 2×2 行列 $\hat{Y}(\theta, x, y, i\omega_n)$ という関数を導入する。:

$$-i\boldsymbol{v}_F \cdot \nabla \hat{Y}(\theta, x, y; i\omega_n) = (2i\bar{\omega}_n K_3 - i\Delta K_+ + i\Delta^* K_-)\hat{Y} \tag{23}$$

この $\hat{Y}$ を用いると、規格化も含めて $\check{g}(\theta, x, y; i\omega_n)$ は

$$\check{g}(\theta, x, y; i\omega_n) = -\hat{Y} \cdot 2K_3 \cdot [\hat{Y}]^{-1} \tag{24}$$

のように書くことができる。この $\check{g}$ が Eilenberger 方程式を満たすことは

$$\frac{\partial}{\partial x}(\check{g} \cdot Y) = -\frac{\partial \hat{Y}}{\partial x} \cdot 2K_3 \tag{25}$$

に式 (23) を代入することで容易に示すことができる。今、

$$\hat{Y}(\theta, x, y; i\omega_n) \equiv e^{a_+(\theta,x,y;i\omega_n)K_+} e^{a_3(\theta,x,y;i\omega_n)K_3} e^{a_-(\theta,x,y;i\omega_n)K_-} \tag{26}$$

とおき、式 (24) に代入し交換関係を用いて整理すると

$$\check{g}(\theta, x, y; i\omega_n) = -\left\{1 - 2a_-a_+e^{-a_3}\right\} 2K_3 - a_+\left\{a_-a_+e^{-a_3} - 1\right\} 2K_+ - a_-e^{-a_3} 2K_- \tag{27}$$

と書くことができる。また、$\hat{Y}(\theta, x, y; i\omega_n)$ に関する微分方程式に式 (26) を代入し、交換関係を用いて整理すると

$$\frac{\partial a_3}{\partial x} - 2a_+e^{-a_3}\frac{\partial a_-}{\partial x} = -\frac{2\bar{\omega}}{v_F} \tag{28}$$

$$e^{-a_3}\frac{\partial a_-}{\partial x} = -\frac{\Delta^*}{v_F} \tag{29}$$

$$\frac{\partial a_+}{\partial x} - a_+\frac{\partial a_3}{\partial x} + a_+^2 e^{-a_3}\frac{\partial a_-}{\partial x} = \frac{\Delta}{v_F} \tag{30}$$

となる。これらの微分方程式より、a_- 及び a_3 が $a_+(\theta, x, y; i\omega_n)$ を用いて

$$a_3(\theta, x, y; i\omega_n) = -\frac{2}{v_F}\left[\bar{\omega}_n x + \int_0^x \Delta^* a_+ dx'\right] + a_3(\theta, 0, y; i\omega_n) \tag{31}$$

$$a_-(\theta, x, y; i\omega_n) = -\frac{1}{v_F}\int_0^x \Delta^* e^{a_3} dx' + a_-(\theta, 0, y; i\omega_n) \tag{32}$$

と表すことできる。したがって、解くべき微分方程式は $a_+(\theta, x, y; i\omega_n)$ に関する以下の Riccati 方程式

$$v_F\frac{\partial}{\partial x}a_+(\theta, x, y; i\omega_n) + \left[2\bar{\omega}_n + \Delta^* a_+\right] a_+ - \Delta = 0 \tag{33}$$

のみとなる。したがって、この微分方程式を解き $a_+(\theta, x, y; i\omega_n)$ を求め、式 (31) と式 (32) を用いて a_3、a_- を求めれば、$\check{g}(\theta, x, y; i\omega_n)$ を求めることができることがわかる。しかしながら、explosion trick という方法を巧みに用いることによってより簡単に $\check{g}(\theta, x, y; i\omega_n)$ を得る方法が知られている。

4 Explosion Trick

ここでは Eilenberger 方程式の性質を用いた、解の構成法について述べる。まず、Eilenberger 方程式を

$$-iv_F\nabla g = [B, g] \tag{34}$$

[1] 植野氏の修士論文の式と符号が若干違うが、植野氏のミスプリントだと思われる。

と書くことにする[2]。

Eilenberger 方程式のある二つの解を g_+、g_- とする。このとき、**二つの解の交換関係** $g_+g_- - g_-g_+$ **も解である**。g_+、g_- が物理的な解となる条件（発散しない等）や、規格化条件 $g_\pm \cdot g_\pm = 1$ を満たしていなくても、それらの交換関係が物理的な解となり規格化条件を満たすことがある。$g = g_+g_- - g_-g_+$ を Eilenberger 方程式の解として採用する方法を Explosion Trick(Explosion Method) と呼ぶ。

4.1 g_+g_- が解であることの証明

まず、

$$-iv_F\nabla g_+ = [B, g_+] \tag{35}$$

$$-iv_F\nabla g_- = [B, g_-] \tag{36}$$

が成り立っているとする。このとき、

$$-iv_F\nabla(g_+g_-) = [B, g_+g_-] \tag{37}$$

も成り立つことを以下に示す。

$$\begin{aligned}
-iv_F\nabla(g_+g_-) &= -iv_F\{\nabla g_+g_- + g_+\nabla g_-\} = -v_F\nabla g_+g_- + g_+[B, g_-] && (38)\\
&= -iv_F\nabla g_+g_- + g_+Bg_- - g_+g_-B = \{-iv_F\nabla g_+g_- + g_+Bg_-\} - g_+g_-B && (39)\\
&= Bg_+g_- - g_+g_-B && (40)\\
&= [B, g_+g_-] && (41)
\end{aligned}$$

となり、g_+g_- は Eilenberger 方程式の解であることが示された。同様に、g_-g_+ も解である。したがって、それらを線形結合した $g_+g_- - g_-g_+$ も解である。

5 Explosion Trick と Riccati 方程式

前節で導入した Explosion Trick を用いると、より簡単に $\check{g}(\theta, x, y; i\omega_n)$ を得ることができる。今、

$$\begin{aligned}
\check{g}_A(\theta, x, y; i\omega_n) &\equiv \hat{Y}_A \cdot K_- \cdot [\hat{Y}_A]^{-1} && (42)\\
&= e^{-a_3}\left(K_- - 2a_+K_3 + a_+^2K_+\right) && (43)\\
\check{g}_B(\theta, x, y; i\omega_n) &\equiv \hat{Y}_B \cdot K_+ \cdot [\hat{Y}_B]^{-1} && (44)\\
&= e^{b_3}\left(K_+ - 2b_-K_3 + b_-^2K_-\right) && (45)\\
\hat{Y}_A(\theta, x, y; i\omega_n) &\equiv e^{a_+K_+}e^{a_3K_3}e^{a_-K_-} && (46)\\
\hat{Y}_A(\theta, x, y; i\omega_n) &\equiv e^{b_-K_-}e^{b_3K_3}e^{b_+K_+} && (47)
\end{aligned}$$

とすると、$\check{g}_A(\theta, x, y; i\omega_n)$ と $\check{g}_B(\theta, x, y; i\omega_n)$ は Eilenberger 方程式の解となっている。ここで、$a_\pm$、$a_3(\theta, x, y; i\omega_n)$ は前述の方程式を満たしている。また、$b_\pm$、$b_3\check{g}_A(\theta, x, y; i\omega_n)$ の満たす微分方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b_3}{\partial x} + 2b_-e^{b_3}\frac{\partial b_+}{\partial x} &= -\frac{2\bar{\omega}}{v_F} && (48)\\
e^{b_3}\frac{\partial b_+}{\partial x} &= \frac{\Delta}{v_F} && (49)\\
\frac{\partial b_-}{\partial x} + b_-\frac{\partial b_3}{\partial x} + b_-^2e^{b_3}\frac{\partial b_+}{\partial x} &= -\frac{\Delta^*}{v_F} && (50)
\end{aligned}$$

[2] ここでは $\check{g} \to g$ と表記することにする

となり、b_+、b_3 は $b_-(\theta,x,y;i\omega_n)$ を用いて

$$
\begin{aligned}
b_3(\theta,x,y;i\omega_n) &= -\frac{2}{v_F}\left[\bar{\omega}_n x + \int_0^x \Delta b_- dx'\right] + b_3(\theta,0,y;i\omega_n) &(51)\\
b_+(\theta,x,y;i\omega_n) &= \frac{1}{v_F}\int_0^x \Delta e^{-b_3} dx' + b_+(\theta,0,y;i\omega_n) &(52)
\end{aligned}
$$

と求めることができる。ここで、$b_-(\theta,x,y;i\omega_n)$ は次の Riccati 方程式

$$
v_F\frac{\partial}{\partial x} b_-(\theta,x,y;i\omega_n) - [2\bar{\omega}_n + \Delta b_-]\, b_- + \Delta^* = 0 \tag{53}
$$

を満たす。この Riccati 方程式に、

$$
b_-(\theta,x,y;i\omega_n) = -\frac{1}{a_+(\theta,x,y;i\omega_n)} \tag{54}
$$

という関係を仮定して整理すると $a_+(\theta,x,y;i\omega_n)$ に関する Riccati 方程式とほとんど同じになることがわかる。a_+ と b_- の解の符号を対応するように選べば、上式の関係が成り立つ。

ここでは、$\check{g}_A$、cg_B という解を考えたが、これらの解が物理的な解であるかどうかは保証されていない。$x\to\pm\infty$ に対して、$\check{g}_A$、$\check{g}_B$ はどのように振舞うであろうか。ここで、十分遠方において系が空間的に一様かつ $\boldsymbol{A}=0$ という状態に連続的に移行するという境界条件を課す。そうすれば、空間的に一様な系での Riccati 方程式を解くことで、$x\to\pm\infty$ における a_3、b_3 の振る舞いがわかる[3]。しかし、このようなことを調べなくても、これらの解は

$$
\begin{aligned}
\check{g}_A\cdot\check{g}_A &= 0 &(55)\\
\check{g}_B\cdot\check{g}_B &= 0 &(56)
\end{aligned}
$$

となり規格化条件を満たしえないために有効な解にはなりえないことがわかる。したがって、Explosion Trick を用いて、

$$
\begin{aligned}
\check{g}(\theta,x,y;i\omega_n) &= [\check{g}_A(\theta,x,y;i\omega_n),\check{g}_B(\theta,x,y;i\omega_n)] &(57)\\
&\equiv g_3 2K_3 + g_+K_+ - g_-K_- &(58)
\end{aligned}
$$

を解として採用することにする。この解は規格化条件を満たし、$x\to\pm\infty$ で発散しない。ここで、$g_\pm$、$g_3(\theta,x,y;i\omega_n)$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
g_3(\theta,x,y;i\omega_n) &= [1-a_+b_-][1+a_+b_-]e^{b_3-a_3} &(59)\\
g_+(\theta,x,y;i\omega_n) &= -2a_+[1+a_+b_-]e^{b_3-a_3} &(60)\\
g_-(\theta,x,y;i\omega_n) &= -2b_-[1+a_+b_-]e^{b_3-a_3} &(61)
\end{aligned}
$$

で与えられる。次に、この $\check{g}(\theta,x,y;i\omega_n)$ の規格化定数を求める。規格化条件 $\check{g}\cdot\check{g}=\check{1}$ は

$$
\begin{aligned}
\check{g}\cdot\check{g} &= [g_3g_3 + g_+g_-]\cdot\check{1} &(62)\\
&= [1+a_+b_-]^4 e^{2b_3-2b_3}\cdot\check{1} &(63)\\
&= \check{1} &(64)
\end{aligned}
$$

となり、

$$
[1+a_+b_-]^2 e^{b_3-a_3} = \pm 1 \tag{65}
$$

となる。ここでの $\pm$ は、一様な場合の準古典 Green 関数の符号と合うように決める。以上から、規格化も含めて $g_\pm$、g_3 は

$$
\begin{aligned}
g_3(\theta,x,y;i\omega_n) &= \pm\frac{1-a_+b_-}{1+a_+b_-} &(66)\\
g_+(\theta,x,y;i\omega_n) &= \mp\frac{2a_+}{1+a_+b_-} &(67)\\
g_-(\theta,x,y;i\omega_n) &= \mp\frac{2b_-}{1+a_+b_-} &(68)
\end{aligned}
$$

[3] 一様な系での a_+、b_- はのちにわかる。そのとき発散するかどうかを見る。

となることがわかる[4]。これらの表式より、$a_+(x)$ と $b_-(x)$ それぞれに対する Scalar Riccati 方程式を解くことで（さらに積分して $a_-(x)$、$a_3(x)$ 等を求めることなく）Eilenberger 方程式の解を得られるということがわかる。

6　系が空間的に一様かつ $A = 0$ のときの解

最も簡単な例として、系が空間的に一様かつ $\boldsymbol{A} = 0$ という状態にし対して、この方法を用いて準古典 Green 関数を求めてみる。

このとき、Riccati 方程式は

$$\begin{aligned} \Delta^* a_+^2 + 2\omega_n a_+ - \Delta &= 0 && (69) \\ -\Delta^* b_+^2 - 2\omega_n a_+ + \Delta^* &= 0 && (70) \end{aligned}$$

となり、単純な a_+、b_- に対する二次方程式であるから容易にこれらを解くことができて

$$\begin{aligned} a_+(\theta, x, y; i\omega_n) &= \frac{-\omega_n + \sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}}{\Delta^*} && (71) \\ &= \frac{\Delta(\theta, x, y; i\omega_n)}{\omega_n + \sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} && (72) \\ b_-(\theta, x, y; i\omega_n) &= \frac{-\omega_n + \sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}}{\Delta} && (73) \\ &= \frac{\Delta^*(\theta, x, y; i\omega_n)}{\omega_n + \sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} && (74) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} g_3(\theta, x, y; i\omega_n) &= \pm \frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} && (75) \\ g_+(\theta, x, y; i\omega_n) &= \mp \frac{\Delta}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} && (76) \\ g_-(\theta, x, y; i\omega_n) &= \mp \frac{\Delta^*}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} && (77) \end{aligned}$$

となる。一様な系での Gor'kov 方程式を用いた解との比較をすれば、下符号をとればいいことがわかる。結局、準古典 Green 関数は

$$\check{g} = -\frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \begin{pmatrix} \omega_n & i\Delta \\ -i\Delta^* & -\omega_n \end{pmatrix} \tag{78}$$

となる。

7　$\check{g}_A$、$\check{g}_B$ は発散するか否か

$x \to \pm\infty$ においては、系が空間的に一様かつ $\boldsymbol{A} = 0$ という状態になっているとすれば、Δ は空間に依存せず、a_+ も式 (72) より空間に依存しない。このとき、式 (31) を用いると a_3 は

$$\begin{aligned} a_3(\theta, |x| \to \infty, y; i\omega_n) &= -\frac{2}{v_F}\left[\omega_n x + \Delta^* a_+ x\right] + a_3(\theta, x, y; i\omega_n) && (79) \\ &\sim -\frac{2}{v_F}(\omega_n + \Delta^* a_+) x && (80) \end{aligned}$$

[4]実際は一様な場合の準古典 Green 関数の符号から考えれば下符号をとればよいということがわかる。

となり、式 (43) から $\check{g}_A$ は

$$\check{g}_A(\theta, |x| \to \infty, y; i\omega_n) \propto e^{Cx} \tag{81}$$

という形をしている。よって、$x \to \infty$ か $x \to -\infty$ で $\check{g}_A$ は発散することがわかる。同様の議論を用いれば、$\check{g}_B$ も発散することが容易に確かめられる。

参考文献

高野文彦、「多体問題」(培風館　新物理学シリーズ 18)

J. M. ザイマン、"現代量子論の基礎" (丸善プラネット株式会社)

Richard D. Mattuck. "A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem" 2nd (Dover)

Nikolai Kopnin."Theory of Nonequilibrium Superconductivity" (Oxford Science Publications)

A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I.E. Dzyaloshinski "Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics" (Dover)

植野洋介、東京大学修士論文 (2002)

Nils Schopohl. "Transformation of the Eilenberger Equation of Superconductivity to Scalar Riccati Equation" (Quasiclassical Methods in Superconductivity & Superfluidity;Verditz 96)