準古典 Green 関数と Eilenberger 方程式

永井佑紀

平成 17 年 10 月 20 日

いままでのノートで、Green 関数の Gor'kov 方程式を導出してきた。このノートでは、Gor'kov 方程式を解く際の有力な近似理論として準古典近似をまとめる。温度 Green 関数を G と表記し、このノートでは単に Green 関数と呼ぶことにする。

1 準古典近似の気持ち

最終的に行いたいことは、物理量を求めることである。以前のノートで述べたように、物理量 Q の平均値は

$$\langle Q\rangle = \int\int d^3\boldsymbol{r}_1 d^3\boldsymbol{r}_2 \delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) q(\boldsymbol{r}_1) \lim_{\tau'\to\tau+} G(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;\tau) \tag{1}$$

で与えられる。また、Green 関数を虚時間に対して Fourier 変換すると Green 関数の Fourier 変換は

$$G_{\alpha\beta}(\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_n e^{-i\omega_n\tau} G_{\alpha\beta}(\omega_n) \tag{2}$$

となる。さらに、座標に関する Fourier 変換を行うと

$$\begin{aligned}
\langle Q\rangle &= \frac{1}{\beta}\lim_{\tau\to 0+}\sum_n \int d^3\boldsymbol{r}_1 d^3\boldsymbol{r}_2 q(\boldsymbol{r}_1)\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) e^{-i\omega_n\tau} G(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;i\omega_n) &(3)\\
&= \frac{1}{\beta}\lim_{\tau\to 0+}\sum_n \int d^3\boldsymbol{r}_1 d^3\boldsymbol{r}_2 \frac{d\boldsymbol{p}_1^3}{(2\pi)^3}\frac{d\boldsymbol{p}_2^3}{(2\pi)^3} q(\boldsymbol{r}_1)\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) e^{i(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2)} e^{-i\omega_n\tau} G(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2;i\omega_n) &(4)\\
&= \frac{1}{\beta}\sum_n \int d^3\boldsymbol{r}_1 d^3\boldsymbol{r}_2 q(\boldsymbol{r}_1) \frac{d\boldsymbol{p}_1^3}{(2\pi)^3}\frac{d\boldsymbol{p}_2^3}{(2\pi)^3} G(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2;i\omega_n) e^{i\frac{\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2}{2}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)} e^{i(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}} \delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) &(5)
\end{aligned}$$

となり、$\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}+\frac{\boldsymbol{k}}{2}$、$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{k}}{2}$、$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{R}+\frac{\bar{\boldsymbol{r}}}{2}$、$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{R}-\frac{\bar{\boldsymbol{r}}}{2}$ と変数変換すれば

$$\langle Q\rangle = \frac{1}{\beta}\sum_n \int d^3\boldsymbol{R} d^3\bar{\boldsymbol{r}} q(\boldsymbol{R}+\bar{\boldsymbol{r}}/2) \frac{d\boldsymbol{p}^3}{(2\pi)^3}\frac{d\boldsymbol{k}^3}{(2\pi)^3} G(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k};i\omega_n) e^{i\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{r}}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}} \delta(\bar{\boldsymbol{r}}) \tag{6}$$

となる。

上式からわかるように、運動量表示の Green 関数を用いて物理量を求める際、運動量の積分が現れてくる。被積分関数の中で、Green 関数は $|p|$ に関して急激に変化する。また、BCS 理論から予想されるように、Fermi 面近傍においてエネルギーギャップなどの特異性が現れるので、Green 関数は $\delta\xi_{\boldsymbol{p}} \sim \Delta$ 程度の幅の局在したピークを持つだろう。このことを考えれば、$\Delta \ll E_f$ であれば、他の被積分関数はその Fermi 面上の値に置き換えることができるだろう。これは、BCS 理論において常伝導状態密度を $N(\xi)=N(0)$ と置き換えたのと同じような考え方である。すなわち、運動量 $\boldsymbol{p}$ に関する積分を $\boldsymbol{p}$ の立体角 $\Omega_{\boldsymbol{p}}$ に関する積分と絶対値 p に関する積分にわけ、Green 関数のみが絶対値 p の被積分関数となり、その他は立体角 $\Omega_{\boldsymbol{p}}$ に依存する。

運動量空間での積分をエネルギー空間の積分になおすと

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = d\xi_{\boldsymbol{p}} \frac{dS_F}{(2\pi)^3 v_F} \tag{7}$$

となる。ここで、$\xi_{\boldsymbol{p}} = E_n(\boldsymbol{p}) - E_F$ である。E_n は常伝導状態で測ったときのエネルギーである。実際は p は v にも依存して変化するのだが、自由電子の速度は $v \propto E^{1/2}$ であるから、$\Delta \ll E_F$ のとき $v(E) \approx v(E_F) = v_F$ と置くことが可能である。また、Fermi 面が球であれば、$dS_F = p_F^2 d\Omega_{\boldsymbol{p}}$ より

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{p_F^2}{(2\pi)^3 v_F} d\xi_{\boldsymbol{p}} d\Omega_{\boldsymbol{p}} \tag{8}$$

となる。超伝導状態ではバンドにギャップ Δ が開くが、$\Delta \ll E_F$ のときは Fermi 面を球とみなしてもよい。以上を踏まえると、物理量 $\langle Q \rangle$ は

$$\langle Q \rangle = \frac{p_F^2}{\beta(2\pi)^3 v_F} \sum_n \int d^3\boldsymbol{R} d^3\bar{\boldsymbol{r}} q(\boldsymbol{R} + \bar{\boldsymbol{r}}/2) \frac{d\boldsymbol{k}^3}{(2\pi)^3} d\xi_{\boldsymbol{p}} d\Omega_{\boldsymbol{p}} G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}; i\omega_n) e^{i\boldsymbol{p}\bar{\boldsymbol{r}}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}} \delta(\bar{\boldsymbol{r}}) \tag{9}$$

$$= \frac{p_F^2}{\beta(2\pi)^3 v_F} \sum_n \int d^3\boldsymbol{R} q(\boldsymbol{R}) \frac{d\boldsymbol{k}^3}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\boldsymbol{p}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{R}} \int d\xi_{\boldsymbol{p}} G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}; i\omega_n) \tag{10}$$

となる。後述するように、$\int d\xi_{\boldsymbol{p}} G(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}; i\omega_n)$ は発散するため単純に準古典 Green 関数を定義することはできないが、運動量の大きさに関して何らかの積分量を定義することは有益である。なぜなら、物理量の計算では $\bar{\boldsymbol{r}} \to 0$ となるため、絶対値と方向のみの被積分関数しか残らないからである。先ほど述べたように、Green 関数以外の運動量の絶対値依存性をすべて Fermi 面上の値に置き換えるという近似を考えれば、その近似の結果準古典 Green 関数に関する方程式が導出される。

2 準古典 Green 関数

2.1 準古典異常 Green 関数

まず最初に、異常 Green 関数を考える。異常 Green 関数は pair-potentialΔ との関係がついていることからもわかるように、超伝導状態でのみ値を持ち、$\xi_{\boldsymbol{p}}^{-2}$ で減衰する。したがって、準古典異常 Green 関数を

$$\int \frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i} F(\boldsymbol{p}_+, \boldsymbol{p}_-; i\omega_n) = \oint \frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i} F(\boldsymbol{p}_+, \boldsymbol{p}_-; i\omega_n) \equiv f(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{k}; i\omega_n) \tag{11}$$

$$\int \frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i} F^\dagger(\boldsymbol{p}_+, \boldsymbol{p}_-; i\omega_n) = \oint \frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i} F^\dagger(\boldsymbol{p}_+, \boldsymbol{p}_-; i\omega_n) \equiv f^\dagger(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{k}; i\omega_n) \tag{12}$$

と定義する。ここで、周回積分は Fermi 面近傍の極を拾ってくるものとする。また、$\hat{\boldsymbol{p}}$ は極座標表示をしたさいの $\boldsymbol{r}$ 軸方向に対応する。

2.2 準古典 Green 関数

それに対して、Green 関数は常伝導状態でも値を持つ。したがって積分は発散してしまう。そこで、周回積分として

$$\oint \frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i} G(\boldsymbol{p}_+, \boldsymbol{p}_-; i\omega_n) \equiv g(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{k}; i\omega_n) \tag{13}$$

を準古典 Green 関数として定義する。

また、全空間での積分が発散してしまうので、物理量を計算する際に単純に $\xi_{\boldsymbol{p}}$ の積分として準古典 Green 関数を用いることはできない。したがって、Green 関数 G を常伝導成分 $G^(n)$ と超伝導成分 $G - G^{(n)}$ に分ける。すると、

$$\int \frac{p^2dp}{2\pi^2} G(\boldsymbol{p}_+, \boldsymbol{p}_-; i\omega_n) = \int \frac{p^2dp}{2\pi^2} G^{(n)} + \int \frac{p^2dp}{2\pi^2} [G - G^{(n)}] \tag{14}$$

$$= \int \frac{p^2dp}{2\pi^2} G^{(n)} + \nu(\hat{\boldsymbol{p}}) \oint d\xi_p [G - G^{(n)}] \tag{15}$$

となる。ただし、$\nu(\hat{\boldsymbol{p}})$ は $\hat{\boldsymbol{p}}$ 方向における Fermi 面上の状態密度である。ここで、

$$\begin{aligned}
G^{(n)}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2;i\omega_n) &= \int d\boldsymbol{r}_1 d\boldsymbol{r}_2 G^{(n)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;i\omega_n)e^{i(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}_2)} &(16)\\
&= \int d(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)d\boldsymbol{r}_2 G^{(n)}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2;i\omega_n)e^{i\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}e^{i(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{r}_2} &(17)\\
&= \int d(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)G^{(n)}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2;i\omega_n)e^{i\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}\int d\boldsymbol{r}_2 e^{i(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{r}_2} &(18)\\
&= G^{(n)}(\boldsymbol{p}_1;i\omega_n)\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)(2\pi)^3 &(19)\\
&= G^{(n)}(\boldsymbol{p};i\omega_n)(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k}) &(20)
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
G^{(n)}(\boldsymbol{p};i\omega_n) &= \frac{1}{\xi_{\boldsymbol{p}}-i\omega_n} &(21)\\
&= \mathcal{P}\frac{1}{\xi_{\boldsymbol{p}}}+\imath\pi\mathrm{sign}(\omega_n)\delta(\xi_{\boldsymbol{p}}) &(22)
\end{aligned}$$

を用いると、

$$\oint d\xi_{\boldsymbol{p}} G^{(n)} = -i\pi\mathrm{sign}(\omega_n) \tag{23}$$

となり、超伝導成分の項内の被積分関数 $G^{(n)}$ を変形することができる。以上より、

$$\begin{aligned}
\int\frac{p^2dp}{2\pi^2}G &= \int\frac{p^2dp}{2\pi^2}G^{(n)}+\nu(\hat{\boldsymbol{p}})\left[\oint d\xi_{\boldsymbol{p}}G+i\pi\mathrm{sign}(\omega_n)(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k})\right] &(24)\\
&= (2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k})\mathcal{P}\int\frac{p^2dp}{2\pi^2}\frac{1}{\xi_{\boldsymbol{p}}}+\nu(\hat{\boldsymbol{p}})i\pi\left[g+(2\pi)^3\mathrm{sign}(\omega_n)\delta(\boldsymbol{k})\right] &(25)
\end{aligned}$$

が得られる。

$\bar{G}$ に関しても全く同様に

$$\begin{aligned}
\oint\frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i}\bar{G}(\boldsymbol{p}_+,\boldsymbol{p}_-;i\omega_n) &\equiv \bar{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k};i\omega_n) &(26)\\
\int\frac{p^2dp}{2\pi^2}\bar{G} &= (2\pi)^3\delta(\boldsymbol{k})\mathcal{P}\int\frac{p^2dp}{2\pi^2}\frac{1}{\xi_{\boldsymbol{p}}}+\nu(\hat{\boldsymbol{p}})i\pi\left[\bar{g}-(2\pi)^3\mathrm{sign}(\omega_n)\delta(\boldsymbol{k})\right] &(27)
\end{aligned}$$

となる。

また、準古典 Green 関数の行列表示として

$$\breve{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k};i\omega_n)=\begin{pmatrix} g(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k};i\omega_n) & f(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k};i\omega_n)\\ -f^\dagger(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k};i\omega_n) & \bar{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k};i\omega_n)\end{pmatrix} \tag{28}$$

を導入することにする。また、$\boldsymbol{k}$ に関して Fourier 変換を行うと

$$\begin{aligned}
\breve{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n) &= \begin{pmatrix} g(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n) & f(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)\\ -f^\dagger(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n) & \bar{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)\end{pmatrix} &(29)\\
&= \int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\breve{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k};i\omega_n) &(30)
\end{aligned}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{r}$ を重心座標と定義しなおしている。

3　Eilenberger 方程式

3.1　磁場がある場合の Gor'kov 方程式

磁場があるときの Gor'kov 方程式は

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\grave{\nabla}^2}{2m}+\mu\right) & -\Delta(x) \\ \Delta^*(x) & \left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\acute{\nabla}^2}{2m}+\mu\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G(x,x') & F(x,x') \\ -F^\dagger(x,x') & \hat{G}(x,x') \end{pmatrix}=\delta(x-x')\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

と書くことができる。ここで、

$$\acute{\nabla} \quad \equiv \quad \nabla-\frac{ie}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{32}$$

$$\grave{\nabla} \quad \equiv \quad \nabla+\frac{ie}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{33}$$

と定義した。$\grave{\nabla}$ は ψ に作用するとき、$\acute{\nabla}$ は $\psi^\dagger$ に作用するときに用いられる。

3.2　Eilenberger 方程式の導出

準古典 Green 関数が従う運動方程式を導く。Gor'kov 方程式から相対座標に関する情報は小さいと近似することで、相対座標に関する情報を取り除き閉じた理論を作りたい。不純物などによる自己エネルギー $\sum$ は小さいとして無視する。また、ゲージとして

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{34}$$

をとり、$\boldsymbol{A}$ の二次の項を無視する。また、

$$\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r})=\begin{pmatrix} 0 & \Delta(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}) \\ -\Delta^*(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}) & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

とする。相対座標に関する振動が現れる項を小さいとして近似したいので、二つの Gor'kov 方程式の差をとると都合が良い。また、方程式は τ に関して Fourier 変換しておく。そうすると、

$$\check{G}^{-1}(\boldsymbol{r}_1,i\omega_n)\check{G}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;i\omega_n)-\check{G}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;i\omega_n)\bar{\check{G}}^{-1}(\boldsymbol{r}_2,i\omega_n)=\check{0} \tag{36}$$

を変形して、相対座標を方程式から取り除けばよいことがわかる。

以下、式の変形である。

$$\begin{pmatrix} i\omega_n+\frac{1}{2m}(\nabla_1-\frac{ie}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1))^2 & 0 \\ 0 & -i\omega_n+\frac{1}{2m}(\nabla_1+\frac{ie}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1))^2 \end{pmatrix}\check{G}-\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_1,\boldsymbol{r}_1)\check{G} \tag{37}$$

$$-\check{G}\begin{pmatrix} i\omega_n+\frac{1}{2m}(\nabla_2-\frac{ie}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2))^2 & 0 \\ 0 & -i\omega_n+\frac{1}{2m}(\nabla_2+\frac{ie}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2))^2 \end{pmatrix}+\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_2,\boldsymbol{r}_2)\check{G} \tag{38}$$

とし、Pauli 行列

$$\sigma^z=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

を用いれば、

$$\begin{aligned}&\frac{\nabla_1^2-\nabla_2^2}{2m}\check{1}\check{G}+i\omega_n\left[\sigma^z,\check{G}\right]-\left\{\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_1,\boldsymbol{r}_1)\check{G}-\check{G}\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_2,\boldsymbol{r}_2)\right\}\\ &\qquad-\frac{ie}{mc}\left\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1)\cdot\nabla_1\sigma^z\check{G}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2)\cdot\nabla_2\check{G}\sigma^z\right\}\end{aligned} \tag{40}$$

となり、さらに変形すると、

$$\frac{\nabla_1^2-\nabla_2^2}{2m}\check{G}+i\omega_n\left[\sigma^z,\check{G}\right]-\left[\frac{\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_1,\boldsymbol{r}_1)+\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_2,\boldsymbol{r}_2)}{2},\check{G}\right]$$
$$-\left[\frac{\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_1,\boldsymbol{r}_1)-\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_2,\boldsymbol{r}_2)}{2},\check{G}\right]_+-\frac{ie}{mc}\left\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1)\cdot\nabla_1\sigma^z\check{G}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2)\cdot\nabla_2\check{G}\sigma^z\right\} \tag{41}$$

となる。相対座標に関する振動の特徴的な長さは p_F^{-1} であり、pair-potential は ξ 程度、ベクトルポテンシャルは λ_L 程度であるから、$p_F^{-1}\ll\xi,\lambda_L$ であれば、それらのその重心での値と等しいと近似でき

$$\left[\frac{\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_1,\boldsymbol{r}_1)+\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_2,\boldsymbol{r}_2)}{2},\check{G}\right] \sim [\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}),\check{G}] \tag{42}$$

$$\left[\frac{\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_1,\boldsymbol{r}_1)-\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}_2,\boldsymbol{r}_2)}{2},\check{G}\right]_+ \sim 0 \tag{43}$$

$$\left\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_1)\cdot\nabla_1\sigma^z\check{G}+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_2)\cdot\nabla_2\check{G}\sigma^z\right\} \sim \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\left\{\nabla_1\sigma^z\check{G}+\nabla_2\check{G}\sigma^z\right\} \tag{44}$$

となる。これらを用いれば、上式は

$$\frac{\nabla_1^2-\nabla_2^2}{2m}\check{G}-\left[i\omega_n\sigma^z+\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}),\check{G}\right]-\frac{ie}{mc}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\left\{\nabla_1\sigma^z\check{G}+\nabla_2\check{G}\sigma^z\right\} \tag{45}$$

となる。ここで、微分演算子 ∇_1、∇_2 を、重心座標 $\boldsymbol{r}$ および相対座標 $\bar{\boldsymbol{r}}$ に関する微分演算子 ∇、$\bar{\nabla}$ で書き表せば、

$$\nabla_1 = \bar{\nabla}+\frac{1}{2}\nabla \tag{46}$$

$$\nabla_2 = -\bar{\nabla}+\frac{1}{2}\nabla \tag{47}$$

としてさらに書き直せば、

$$\frac{\nabla\bar{\nabla}}{m}\check{G}-\left[i\omega_n\sigma^z+\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}),\check{G}\right]-\frac{ie}{mc}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\left\{\left[\sigma^z,\bar{\nabla}\check{G}\right]+\frac{1}{2}\left[\sigma^z,\nabla\check{G}\right]_+\right\} \tag{48}$$

となる。また、Green 関数の相対座標 $\bar{\boldsymbol{r}}$ に関する Fourier 表示は

$$\check{G}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2;i\omega_n)=\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\check{G}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};i\omega_n)e^{i\boldsymbol{p}\cdot\bar{\boldsymbol{r}}} \tag{49}$$

である。式 (48) の第一項と最終項の係数の大きさを比べると、

$$\boldsymbol{v}_F\nabla\check{G}\gg\frac{e}{2mc}\boldsymbol{A}\nabla\check{G} \tag{50}$$

であることがわかり、最終項は無視することができる。よって、式 (49) を式 (48) に代入して整理すると、

$$-i\boldsymbol{v}\cdot\nabla\check{G}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r};i\omega_n)=\left[i\omega_n\sigma^z-\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r})+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\sigma^z,\check{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p};i\omega_n)\right] \tag{51}$$

となる。これで、相対座標 $\bar{\boldsymbol{r}}$ が陽に現れない方程式を作ることができた。

最後に、準古典 Green 関数に関する方程式にするために、Green 関数以外の $\xi_{\boldsymbol{p}}$ 依存性を無視し Fermi 面上の値に置き換え、両辺を $\xi_{\boldsymbol{p}}$ で周回積分すると、

$$-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n) = \left[i\omega_n\sigma^z-\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r})+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\sigma^z,\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)\right] \tag{52}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} i\omega_n+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) & -\Delta(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}) \\ \Delta^*(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}) & -i\omega_n-\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\end{pmatrix},\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)\right] \tag{53}$$

となり、これが Eilenberger 方程式である。

また、これらを成分ごとに書き出すと、

$$-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla g(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)+\Delta^*(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r})f-\Delta(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r})f^\dagger = 0 \tag{54}$$

$$-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla \bar{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)-\Delta^*(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r})f+\Delta(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r})f^\dagger = 0 \tag{55}$$

$$-i\boldsymbol{v}_F\cdot\left(\nabla-\frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)f-2i\omega_n f-\Delta(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r})(g-\bar{g}) = 0 \tag{56}$$

$$i\boldsymbol{v}_F\cdot\left(\nabla+\frac{2ie}{c}\boldsymbol{A}\right)f^\dagger-2i\omega_n f^\dagger-\Delta^*(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r})(g-\bar{g}) = 0 \tag{57}$$

となる。後に述べる規格化条件により、第 1 式と第 2 式、第 3 式と第 4 式が完全に同等となる。したがって、独立な方程式は二つのみである。

3.3 規格化条件

Eilenberger 方程式は、行列積 $\check{g}\check{g}$ も解となっている。以下にそれを示す。Eilenberger 方程式を

$$-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla\check{g}=[B,\check{g}]=B\check{g}-\check{g}B \tag{58}$$

とおく。ここで、

$$B\check{g} = \check{g}B-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla\check{g} \tag{59}$$

$$B\check{g}\check{g} = \check{g}B\check{g}-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla\check{g}\check{g} \tag{60}$$

であるから、

$$[B,\check{g}\check{g}] = B\check{g}\check{g}-\check{g}\check{g}B=\check{g}B\check{g}-\check{g}\check{g}B-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla\check{g}\check{g} \tag{61}$$

$$= \check{g}[B,\check{g}]-i\boldsymbol{v}_F\cdot\{\nabla(\check{g}\check{g})-(\nabla\check{g})\check{g}\} \tag{62}$$

となり、式 (58) を用いると、

$$[B,\check{g}\check{g}] = \check{g}(-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla\check{g})-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla(\check{g}\check{g})+i\boldsymbol{v}_F\cdot(\nabla\check{g})\check{g} \tag{63}$$

$$= -i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla(\check{g}\check{g}) \tag{64}$$

となり、これは $\check{g}\check{g}$ が Eilenberger 方程式の解であることを示している。

さて、$\check{g}\check{g}$ が解であるということは、$\hat{\boldsymbol{p}}$ に沿って

$$\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n) = \begin{pmatrix} gg-ff^\dagger & f(g+\bar{g}) \\ -f^\dagger(g+\bar{g}) & \bar{g}\bar{g}-ff^\dagger \end{pmatrix} \tag{65}$$

$$= A\check{1}+B\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n) \tag{66}$$

を満たすということである。なぜならば、$\check{g}$ に関する線形な方程式は、その解の線形結合も解であるからである。

ここで、これらの定数を決定したい。定数は系の状況によらないので、単純な状況で準古典 Green 関数の表式を求めることで定数を決定することにする。そこで、十分遠方において系が空間的に一様かつ $\boldsymbol{A}=0$ という状態に連続的に移項するという境界条件を課す。そうすることによって、空間的に一様な場合の準古典 Green 関数の具体的な表式が求まる。準古典 Green 関数の具体的な表式は、別のノートに述べることにし、ここでは結果だけを記すと、規格化条件は

$$\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)=\check{1} \tag{67}$$

となる。この条件によって、4 個の Eilenberger 方程式のうち 2 個のみが独立となる。

参考文献

高野文彦、「多体問題」(培風館　新物理学シリーズ 18)

J. M. ザイマン、”現代量子論の基礎” (丸善プラネット株式会社)

Richard D. Mattuck. ”A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem” 2nd (Dover)

Nikolai Kopnin.”Theory of Nonequilibrium Superconductivity” (Oxford Science Publications)

A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I.E. Dzyaloshinski ”Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics” (Dover)

植野洋介、東京大学修士論文 (2002)