Gor'kov 方程式の行列表示

永井佑紀

平成 17 年 10 月 19 日

Gor'kov 方程式を行列表示する。今後準古典近似に進む際のまとめになるようにしたい。

1 Gor'kov 方程式

Green 関数と異常 Green 関数と、その複素共役に対応するものもすべて書き下すと

$$
\begin{aligned}
G_{\alpha\beta}(x,x') &\equiv -\langle \mathrm{T}_\tau \psi_\alpha(x)\psi^\dagger_\beta(x')\rangle &(1)\\
\bar{G}_{\alpha\beta}(x,x') &\equiv \langle \mathrm{T}_\tau \psi^\dagger_\alpha(x)\psi_\beta(x')\rangle &(2)\\
F_{\alpha\beta}(x,x') &\equiv \langle \mathrm{T}_\tau [\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')]\rangle &(3)\\
F^\dagger_{\alpha\beta}(x,x') &\equiv \langle \mathrm{T}_\tau [\psi^\dagger_\alpha(x)\psi^\dagger_\beta(x')]\rangle &(4)
\end{aligned}
$$

である。また、pair potential を

$$
\Delta_{\alpha\beta}(x) \equiv |g| F_{\alpha\beta}(x,x) \tag{5}
$$

と定義する。このとき、BCS 近似におけるこれらの運動方程式は

$$
\begin{aligned}
\left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)G_{\alpha\beta}(x,x')+\Delta_{\alpha\gamma}(x)F^\dagger_{\gamma\beta}(x,x') &= \delta_{\alpha\beta}\delta^{(4)}(x-x') &(6)\\
\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\bar{G}_{\alpha\beta}(x,x')+\Delta^*_{\alpha\gamma}(x)F_{\gamma\beta}(x,x') &= \delta_{\alpha\beta}\delta^{(4)}(x-x') &(7)\\
\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)F^\dagger_{\alpha\beta}(x,x')-\Delta^*_{\alpha\gamma}(x)G_{\gamma\beta}(x,x') &= 0 &(8)\\
\left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)F_{\alpha\beta}(x,x')-\Delta_{\alpha\gamma}(x)\bar{G}_{\gamma\beta}(x,x') &= 0 &(9)\\
& &(10)
\end{aligned}
$$

と書ける。

2 singlet-pairing の場合

singlet-pairing においては、pair potential は spin 添え字に対して反対称である。したがって、

$$
\Delta_{\alpha\beta}(x) = -\Delta_{\beta\alpha}(x) \tag{11}
$$

が成り立つ。ここで、Pauli 行列

$$
\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{12}
$$

を導入する。Pauli 行列の行列要素は $\sigma^y_{\alpha\beta}=-i$、$\sigma^y_{\beta\alpha}=i$ なので、spin 添え字に対して反対称である条件を満たすことができる。そのとき、

$$\Delta_{\alpha\beta}(x) = i\sigma^y_{\alpha\beta}\Delta(x) \tag{13}$$

$$\Delta^\dagger_{\alpha\beta}(x) = -i\sigma^y_{\alpha\beta}\Delta^*(x) \tag{14}$$

を導入すれば、spin 添え字を持たない量を定義できる。また、異常 Green 関数は pair potential と関連しているので、同様な表現を用いることができて、

$$F_{\alpha\beta}(x,x') = i\sigma^y_{\alpha\beta}F(x,x') \tag{15}$$

$$F^\dagger_{\alpha\beta}(x,x') = -i\sigma^y_{\alpha\beta}F^\dagger(x,x') \tag{16}$$

とすることができる。これらより、Gor'kov 方程式の左辺第二項、右辺は spin 添え字が同じときのみ値を持つことになる。よって、左辺第一項の Green 関数は

$$G_{\alpha\beta}(x,x') = \delta_{\alpha\beta}G(x,x') \tag{17}$$

$$\bar{G}_{\alpha\beta}(x,x') = \delta_{\alpha\beta}\bar{G}(x,x') \tag{18}$$

とならなければならない。

以上より、運動方程式は

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) & -\Delta(x) \\ \Delta^*(x) & \left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(x,x') & F(x,x') \\ -F^\dagger(x,x') & \hat{G}(x,x') \end{pmatrix} = \delta(x-x') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

と書くことができる。また、Green 関数の行列表示として、

$$\check{G}^{-1}(x) \equiv \begin{pmatrix} \left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) & -\Delta(x) \\ \Delta^*(x) & \left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\check{G}(x,x') \equiv \begin{pmatrix} G(x,x') & F(x,x') \\ -F^\dagger(x,x') & \hat{G}(x,x') \end{pmatrix} \tag{21}$$

を定義すれば、Gor'kov 方程式は

$$\check{G}^{-1}(x)\check{G}(x,x') = \check{1}\delta(x-x') \tag{22}$$

と書くことができる。

3 triplet-pairing の場合

triplet-pairing の場合は、spin 添え字に対して pair potential は対称なので、

$$\Delta_{\alpha\beta}(x) = \Delta_{\beta\alpha}(x) \tag{23}$$

が成り立ち[1]、singlet のときと同様に Pauli 行列

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

を導入すれば、

$$\Delta_{\alpha\beta}(x) = \sigma^x_{\alpha\beta}\Delta(x) \tag{25}$$

$$\Delta^\dagger_{\alpha\beta}(x) = \sigma^x_{\alpha\beta}\Delta^*(x) \tag{26}$$

[1] ここでの"triplet"はカイラル p 波を考えていることに注意。

という spin 添え字のない量を導入することができ、同様に異常 Green 関数については

$$F_{\alpha\beta}(x,x') = \sigma^x_{\alpha\beta}F(x,x') \tag{27}$$

$$F^\dagger_{\alpha\beta}(x,x') = \sigma^x_{\alpha\beta}F^\dagger(x,x') \tag{28}$$

を導入することができる。singlet のときと同じ理由で Green 関数については

$$G_{\alpha\beta}(x,x') = \delta_{\alpha\beta}G(x,x') \tag{29}$$

$$\bar{G}_{\alpha\beta}(x,x') = \delta_{\alpha\beta}\bar{G}(x,x') \tag{30}$$

を導入することができる。これらを用いると、Gor'kov 方程式の行列表示は

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) & -\Delta(x) \\ \Delta^*(x) & \left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(x,x') & F(x,x') \\ -F^\dagger(x,x') & \hat{G}(x,x') \end{pmatrix} = \delta(x-x') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

となり、形式的に singlet-pairing と同じであることがわかる。したがって、Green 関数の行列表示として、

$$\check{G}^{-1}(x) \equiv \begin{pmatrix} \left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) & -\Delta(x) \\ \Delta^*(x) & \left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$\check{G}(x,x') \equiv \begin{pmatrix} G(x,x') & F(x,x') \\ -F^\dagger(x,x') & \hat{G}(x,x') \end{pmatrix} \tag{33}$$

を定義すれば、Gor'kov 方程式は

$$\check{G}^{-1}(x)\check{G}(x,x') = \check{1}\delta(x-x') \tag{34}$$

と書くことができる。

4 x' に関する Gor'kov 方程式

x' に関する Gor'kov 方程式も導きたい。Heisenberg の運動方程式は

$$\frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial\tau} = \left(\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\psi_\alpha(x) - g\psi^\dagger_\gamma(x)\psi_\gamma(x)\psi_\alpha(x) \tag{35}$$

$$\frac{\partial\psi^\dagger_\alpha(x)}{\partial\tau} = \left(\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\psi^\dagger_\alpha(x) + g\psi^\dagger_\alpha(x)\psi^\dagger_\gamma(x)\psi_\gamma(x) \tag{36}$$

と書けるから、Green 関数を τ' で微分すると

$$\frac{\partial G_{\alpha\beta}(x,x')}{\partial\tau'} = \frac{\partial}{\partial\tau'}(\Delta G) - \langle \mathrm{T}_\tau\psi_\alpha(x)\frac{\partial\psi^\dagger_\beta(x')}{\partial\tau'}\rangle \tag{37}$$

となる。ここで、ΔG は $x=x'$ での Green 関数の不連続性を起因とした項である。上式に Heisenberg の運動方程式を代入して計算していく必要がある。しかし、計算の流れはほとんど τ での微分のときと同じであるために省く。ここでは、結果のみを示す。Gor'kov 方程式は

$$\begin{pmatrix} G(x,x') & F(x,x') \\ -F^\dagger(x,x') & \hat{G}(x,x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial\tau'}+\frac{\nabla'^2}{2m}+\mu\right) & -\Delta(x') \\ \Delta^*(x') & \left(-\frac{\partial}{\partial\tau'}+\frac{\nabla'^2}{2m}+\mu\right) \end{pmatrix} = \delta(x-x') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

という行列表示をすることができる。演算子が右側にあるが、これは τ のときと同様な行列表示を行おうとした結果であるだけで、形式的な問題に過ぎない。ここで、

$$\bar{\check{G}}^{-1}(x') \equiv \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial\tau'}+\frac{\nabla'^2}{2m}+\mu\right) & -\Delta(x') \\ \Delta^*(x') & \left(-\frac{\partial}{\partial\tau'}+\frac{\nabla'^2}{2m}+\mu\right) \end{pmatrix} \tag{39}$$

を定義すれば、Gor'kov 方程式は

$$\check{G}(x,x')\bar{\check{G}}^{-1}(x') = \check{1}\delta(x-x') \tag{40}$$

と書くことができる。

この結果は singlet-pairing も triplet-pairing でも変わらない。

5 Gor'kov 方程式の Fourier 変換

5.1 周波数表示

微分方程式を解くさいには、求める関数を Fourier 変換しておくと便利なことが多い。したがって、Green 関数を虚時間に対して Fourier 変換を行う。

まず、以前のノートで述べたように、(温度) Green 関数の間では、

$$G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\tau<0) = \mp G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\tau+\beta>0) \tag{41}$$

という関係がある。ここで、$\tau_1-\tau_2=\tau$ とし、τ と同じ次元である β は $1/k_BT$ である。したがって、(温度) Green 関数は β の周期を持つ。以上から、Green 関数の Fourier 変換は

$$G_{\alpha\beta}(\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_n e^{-i\omega_n\tau}G_{\alpha\beta}(\omega_n) \tag{42}$$

と書ける。したがって、

$$\check{G}(x,x') = \frac{1}{\beta}\sum_n e^{-i\omega_n(\tau-\tau')}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';i\omega_n) \tag{43}$$

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';i\omega_n) = \int_0^\beta e^{i\omega_n(\tau-\tau')}\check{G}(x,x')d\tau \tag{44}$$

と書ける。ここで、

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';i\omega_n) \equiv \begin{pmatrix} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';i\omega_n) & F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';i\omega_n) \\ -F^\dagger(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';i\omega_n) & barG(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';i\omega_n) \end{pmatrix} \tag{45}$$

である。ここで、

$$\check{G}^{-1}(\boldsymbol{r};i\omega_n) \equiv \begin{pmatrix} i\omega_n+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu & -\Delta(\boldsymbol{r}) \\ \Delta^*(\boldsymbol{r}) & -i\omega_n+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu \end{pmatrix} \tag{46}$$

を用いれば、Gor'kov 方程式は

$$\check{G}^{-1}(\boldsymbol{r},i\omega_n)\check{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';i\omega_n) = \check{1}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{47}$$

となる。

5.2 運動量表示

座標に関して Fourier 変換を行うと、

$$\check{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';i\omega_n) = \int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{d\boldsymbol{p}'}{(2\pi)^3}\check{G}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';i\omega_n)e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}')} \tag{48}$$

$$\check{G}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}';i\omega_n) = \int d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}'\check{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';i\omega_n)e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}')} \tag{49}$$

となる。

6 空間的に一様で磁場のないsinglet-pairingの超伝導体

系が空間的に一様であり、並進対称性を持ち、磁場のない場合、Gor'kov 方程式は容易に解くことができる。周波数表示 Gor'kov 方程式 (47) をさらに座標に関して Fourier 変換すると、G と $F^\dagger$ に関する方程式は

$$
\begin{aligned}
\left(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}\right) G(\mathbf{p}; i\omega_n) + \Delta F^\dagger(\mathbf{p}; i\omega_n) &= 1 \quad (50)\\
\left(i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}\right) F^\dagger(\mathbf{p}; i\omega_n) + \Delta^* G(\mathbf{p}; i\omega_n) &= 0 \quad (51)\\
& \quad (52)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$\xi_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu$ である。また、

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) &= \int\int \frac{d\mathbf{r}_1}{(2\pi)^3}\frac{d\mathbf{r}_2}{(2\pi)^3} G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; i\omega_n) e^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{p}_2\mathbf{r}_2)} \quad (53)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; i\omega_n) e^{i\mathbf{p}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\mathbf{r}_2} \quad (54)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; i\omega_n) e^{i\mathbf{p}_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \int d\mathbf{r}_2 e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\mathbf{r}_2} \quad (55)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2\pi)^3} G(\mathbf{p}_1; i\omega_n)\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)(2\pi)^3 \quad (56)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2\pi)^3} G(\mathbf{p}; i\omega_n)(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}) \quad (57)
\end{aligned}
$$

となることを用いた。ここで、並進対称性から、$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ と置いている。このとき、上式は容易に解けて、その結果は

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{p}; i\omega_n) &= -\frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}}}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + |\Delta|^2} \quad (58)\\
F^\dagger(\mathbf{p}; i\omega_n) &= \frac{\Delta^*}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + |\Delta|^2} \quad (59)
\end{aligned}
$$

となる。

この結果からわかることは、$\xi_{\mathbf{p}}$ 空間において、$G(\xi_{\mathbf{p}})$ は $\xi_{\mathbf{p}}^{-1}$、$F^\dagger(\xi_{\mathbf{p}})$ は $\xi_{\mathbf{p}}^{-2}$ で減衰する関数であるということである。この結果を用いて、準古典近似を以後のノートで構成する。

参考文献

高野文彦、「多体問題」(培風館　新物理学シリーズ 18)

J. M. ザイマン、”現代量子論の基礎” (丸善プラネット株式会社)

Richard D. Mattuck. ”A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem” 2nd (Dover)

Nikolai Kopnin.”Theory of Nonequilibrium Superconductivity” (Oxford Science Publications)

A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I.E. Dzyaloshinski ”Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics” (Dover)