# 経路積分表示 part 2：ボソン系、フェルミオン系の場合

永井佑紀

平成 19 年 10 月 27 日

ボゾン系、フェルミオン系の経路積分表示について考える。フェルミオン系では演算子の反交換関係により、通常の数ではなく、グラスマン数というものを使う必要がある。このノートでは、主に実用に使えそうなグラスマン数の性質についてまとめてみた。グラスマン数は数であるにもかかわらず反可換性を持つ数であり、多項式、微分、積分などに面白い特徴がある。経路積分を用いた計算ではグラスマン数のガウス積分を実行する必要が出てくるのでガウス積分についてもまとめた。

## 1　基本方針：コヒーレント状態

１粒子の経路積分表示のノートでも見たように、経路積分表示というのは、ハミルトニアンを演算子ではなく数で表すことが基本方針となっている。第二量子化表示において、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} \tag{1}$$

のように書かれる。ここで、$c^{(\dagger)}_{\mathbf{k}\sigma}$ は消滅（生成）演算子である。経路積分表示を行いたいのであれば、生成消滅演算子を数として扱うことができればよい。1 粒子のハミルトニアンにおいては、$\hat{p}$、$\hat{x}$ が演算子であり、ハミルトニアンを数にするために

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \tag{2}$$
$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \tag{3}$$

という関係を用いた。よって、

$$c|z\rangle = z|z\rangle \tag{4}$$
$$c^{\dagger}|z\rangle = \bar{z}|z\rangle \tag{5}$$

となるような固有状態を用意すればよい。これ以後簡単のため添え字 $(\mathbf{k}, \sigma)$ は省く。$c^{(\dagger)}$ はエルミート演算子ではないので、その固有値 $z(\bar{z})$ は実数ではない。ボゾン系では複素数になり、フェルミオン系では後述するグラスマン数になる。この演算子は粒子がボソンであれば交換関係、フェルミオンであれば反交換関係を満たす。これら演算子の固有状態のことを「コヒーレント状態」と呼ぶ。

## 2　ボソン系

### 2.1　コヒーレント状態

ボソン系でのコヒーレント状態を求めてみよう。まずは、いろいろな状態に対し $c$ を作用させ、どのような状態になるかを見てみる。ボソンが一つも入っていない状態を真空状態として $|0\rangle$ と書く。そのとき当然

$$c|0\rangle = 0 \tag{6}$$

が成り立つ。次に、一つだけ入っている状態 $c^\dagger|0\rangle$ に対しては

$$cc^\dagger|0\rangle = (1+c^\dagger c)|0\rangle = |0\rangle \tag{7}$$

となる。二つだけ入っている状態の場合は

$$c\frac{1}{\sqrt{2}}c^\dagger c^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+c^\dagger c)c^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}2c^\dagger|0\rangle \tag{8}$$

となる。ここで $\sqrt{2}$ は同じ波数 $\mathbf{k}$ を持ったボーズ粒子は区別できないので数えすぎないように付いている因子である[1]。よって、n 個入っている状態の場合は

$$c\frac{1}{\sqrt{n!}}(c^\dagger)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}n(c^\dagger)^{n-1}|0\rangle \tag{9}$$

となる。これらをじっと見てみると、

$$c\left(1+c^\dagger+(c^\dagger)^2+\cdots+(c^\dagger)^n\right)|0\rangle = \left(0+1+2c^\dagger+\cdots n(c^\dagger)^n\right)|0\rangle \tag{10}$$

が成り立つので、各項に $1/n!$ を掛ければ

$$\begin{aligned} c\left(1+c^\dagger+\frac{1}{2}(c^\dagger)^2+\frac{1}{3!}(c^\dagger)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(c^\dagger)^n\right)|0\rangle &= \left(0+1+c^\dagger+\frac{1}{2}(c^\dagger)^2+\cdots(n-1)(c^\dagger)^{n-1}\right)|0\rangle && (11)\\ c\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}(c^\dagger)^{i-1}\right)|0\rangle &= \left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}(c^\dagger)^{i-1}\right)|0\rangle && (12)\end{aligned}$$

となる。ここで、$c^\dagger$ の代わりに $zc^\dagger$ を代入すれば

$$\begin{aligned} c\left(1+zc^\dagger+\frac{1}{2}(zc^\dagger)^2+\frac{1}{3!}(zc^\dagger)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(zc^\dagger)^n\right)|0\rangle &= \left(z+zc^\dagger+\frac{1}{2}z(zc^\dagger)^2+\cdots(n-1)z(zc^\dagger)^{n-1}\right)|0\rangle \\ c\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}(zc^\dagger)^{i-1}\right)|0\rangle &= z\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}(zc^\dagger)^{i-1}\right)|0\rangle && (13)\end{aligned}$$

となる。よって、$n\to\infty$ とすれば、

$$\begin{aligned} c\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}(zc^\dagger)^{i-1}\right)|0\rangle &= z\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}(zc^\dagger)^{i-1}\right)|0\rangle && (14)\\ c|z\rangle &= z|z\rangle && (15)\\ |z\rangle &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(zc^\dagger)^{i}\right)|0\rangle && (16)\end{aligned}$$

となり、

$$ce^{zc^\dagger}|0\rangle = ze^{zc^\dagger}|0\rangle \tag{17}$$

が得られる。得られた $c$ の固有状態 $|z\rangle$ は、粒子数の異なる状態の無限個の和になっている。さて、得られた固有状態には任意性があることに注意しよう。つまり、任意の複素関数 $f(z)$ を掛けた $f(z)|z\rangle$ も

$$cf(z)e^{zc^\dagger}|0\rangle = zf(z)e^{zc^\dagger}|0\rangle \tag{18}$$

となりやはり固有状態である。この任意性を除くために、粒子数の決まった状態 $|n\rangle$ で成り立つ完全性関係：

$$\sum_{n=0}|n\rangle\langle n| = \hat{1} \tag{19}$$

[1]規格化条件を満たすように決めている。

と同様な

$$\int \frac{d^2z}{\pi}|z\rangle\langle z| = \hat{1} \tag{20}$$

が成り立つように固有状態を決める[2]。固有状態は $|n\rangle$ を用いて書き直すと

$$|z\rangle = f(z)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{n!}}(c^\dagger)^n\right)|0\rangle = f(z)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\right)|n\rangle \tag{21}$$

となるので、

$$|z\rangle\langle z| = |f(z)|^2\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\frac{(\bar{z})^m}{\sqrt{m!}}|n\rangle\langle n| \tag{22}$$

となる。ここで、公式：

$$\int\int d^2z e^{-|z|^2}z^m\bar{z}^m = \pi m!\delta_{mn} \tag{23}$$

を使えるような $f(z) = \exp[-|z|^2/2]$ を用意すれば式（20）を成り立たせることができる。よって、固有状態は

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2}e^{zc^\dagger}|0\rangle \tag{24}$$

となる。なお、

$$[c^\dagger z, \bar{z}c] = |z|^2 \tag{25}$$

と

$$e^{\bar{z}c}|0\rangle = (1+\bar{z}c+(\bar{z}c)^2/2+\cdots)|0\rangle = |0\rangle \tag{26}$$

と Campbell-Baker-Hausdorff の公式：

$$e^{A+B} = e^Ae^Be^{-[A,B]/2} \tag{27}$$

を用いて若干書き直すと

$$|z\rangle = e^{zc^\dagger+\bar{z}c}|0\rangle \tag{28}$$

が得られる。

### 2.2 状態和

状態和 $Z$ は任意の基底を用いてよいので、

$$Z = \int\int\frac{d^2z}{\pi}\langle z|e^{-\beta H}|z\rangle \tag{29}$$

としてよい。よって、1 粒子の方法をほとんどそのまま使うことができる。

## 3 フェルミオン系

### 3.1 コヒーレント状態

フェルミオン系でも、ボソン系と同様なコヒーレント状態を作りたい。しかし、フェルミオンには反交換関係：

$$\begin{aligned}\{c, c^\dagger\} &= cc^\dagger + c^\dagger c = 1 &(30)\\ \{c, c\} &= \{c^\dagger, c^\dagger\} = 0 &(31)\end{aligned}$$

[2]因子 $\pi$ は慣例と思われる。

がある。フェルミオン系では、パウリの排他律より同じ波数 $\mathbf{k}$ を持つ粒子は二つ存在できない。これは、粒子が二つ いる状態が

$$c^\dagger c^\dagger |0\rangle = -c^\dagger c^\dagger |0\rangle \tag{32}$$

となってしまうため禁止されているからである。さて、最終目標は「ハミルトニアンを数で表す」ということであった。しかし、演算子に反交換関係が成り立つということは、「演算子→数」としたときにも同様な関係性が成り立っていなければフェルミオン系を記述したことにはならない。しかし、通常の数はもちろん反交換関係は満たさない。そこで、グラスマン数(Grassmann 数:G 数)という概念を導入する。この G 数については次の節で性質を論じる[3]。G 数 $\eta$ とは

- すべての G 数と反可換であり、かつフェルミオン演算子とも反可換である。
- 反可換性から、$\eta_i^2 = 0$ となる(ノルムがゼロ)。

という数である。

フェルミオン系のコヒーレント状態は G 数 $\eta$ を用いて

$$|\eta\rangle = |0\rangle - \eta|1\rangle \tag{33}$$

書ける。ここで $|1\rangle = c^\dagger|0\rangle$ とした。もちろん、消滅演算子 $c$ を作用させると

$$c|\eta\rangle = -c\eta c^\dagger|0\rangle = \eta|0\rangle = \eta|0\rangle - \eta^2|1\rangle = \eta|\eta\rangle \tag{34}$$

となり、$|\eta\rangle$ は確かに固有状態になっている。この固有状態は

$$|\eta\rangle = e^{c^\dagger \eta}|0\rangle \tag{35}$$

とも書ける[4]。

同じように

$$\langle\bar{\eta}| = \langle 0| - \langle 1|\bar{\eta} \tag{36}$$

を定義しておく。このとき $\bar{\eta}$ は $\eta$ とは関係がない。この状態は

$$\langle\bar{\eta}|c^\dagger = \langle\bar{\eta}|\bar{\eta} \tag{37}$$

となる。

## 3.2 グラスマン数

### 3.2.1 多項式

グラスマン数の性質についてまとめておく。この数を G 数と呼び、通常の複素数を c 数と呼ぶ。G 数が c 数と著しく異なる点は、

$$\eta^2 = 0 \tag{38}$$

が成り立つことである。これは G 数は長さを定義できないことを意味している。この性質が成り立っているので、G 数を変数とした多項式は必ず有限項で終わる。たとえば、一種類の c 数 $x$、一種類の G 数 $\eta$ の多項式で表される関数 $f(x,\eta)$ は

$$f(x,\eta) = f_1(x) + f_2(x)\eta \tag{39}$$

[3] より詳しくはスワンソンの「経路積分法」を参照。まるまる一章分を割いて説明している。
[4] 指数関数の高次の項はノルムがゼロであるために消えている。

という形をしていなくてはならない。たとえば、G 数 $\eta$ の指数関数は

$$e^{\eta} = 1 + \eta \tag{40}$$

となる。G 数 $\eta$、$\xi$ での Campbell-Baker-Hausdorff の公式は

$$e^{\eta+\xi} = e^{\eta} e^{\xi} e^{-(\eta\xi - \xi\eta)/2} \tag{41}$$

となる。

#### 3.2.2 複素共役

複素グラスマン数 $\zeta$ を考える。これは、実グラスマン数 $\eta_R$ と $\eta_I$ を用いて

$$\zeta = \eta_R + i\eta_I \tag{42}$$

と書ける。この複素共役 $\zeta^*$ は

$$\zeta = \eta_R - i\eta_I \tag{43}$$

である。よって、

$$\zeta\zeta^* = (\eta_R + i\eta_I)(\eta_R - i\eta_I) = -i\eta_R\eta_I + i\eta_I\eta_R = -i[\eta_I, \eta_R] \tag{44}$$

$$\zeta^*\zeta = (\eta_R - i\eta_I)(\eta_R + i\eta_I) = i\eta_R\eta_I - i\eta_I\eta_R = i[\eta_I, \eta_R] \tag{45}$$

より

$$(\zeta\zeta^*)^* = \zeta^*\zeta \tag{46}$$

という関係が成り立つ。これらから、複素 G 数の積の複素共役は行列の積のエルミート共役に似ていることがわかる。

#### 3.2.3 微分

G 数の微分は、G 数の反可換性により左右どちら側から作用させたかが重要となる。また、G 数の多項式は一次までしかない。よって、定義すべき微分は二種類のみであり、

$$\frac{\partial \eta_b}{\partial \eta_a} = -\eta_a \frac{\partial^{\leftarrow}}{\partial \eta_b} = \delta_{ab} \tag{47}$$

と定義する。ここで $\partial^{\leftarrow}/\partial\eta_a$ は右微分である。これは $\eta_a$ と $\eta_b$ が一致するときのみ値を持つことを意味している。また二つの G 数の積なのでその結果は可換であり、それは $\delta_{ab}$ が c 数であることからも理解できる。次に G 数における積の微分（ライプニッツ則）は反ライプニッツ則と呼ばれ

$$\frac{\partial}{\partial \eta_a}(\eta_b\eta_c) = \frac{\partial \eta_b}{\partial \eta_a}\eta_c - \frac{\partial \eta_c}{\partial \eta_a}\eta_b = \delta_{ab}\eta_c - \delta_{ac}\eta_b \tag{48}$$

である。これは、微分される G 数と微分する G 数が一致するときのみ値を持つために成り立っている。第二項にマイナス符号がついているのは、微分するために $\eta_c$ を左に寄せた結果である。また $\eta_b = \eta_c = \eta_a$ のときは $\eta_a^2 = 0$ が成り立つためゼロになる。これは他変数でも同じであり、

$$\frac{\partial}{\partial \eta_b}(\eta_a \cdots \eta_b \cdots \eta_c) = (-1)^P(\eta_a \cdots \eta_b) \tag{49}$$

と一般化できる。ここで $P$ は $\eta_b$ を左に寄せるため繰り返した置換操作の数である。つまり、$P$ は $\eta_b$ を左から数えたときの順番である。

### 3.2.4　積分

多項式が必ず G 数の一次で終わるので、積分は

$$\int d\eta, \quad \int d\eta\eta \tag{50}$$

の二種類しかない。それ以外の積分はすべてゼロである。この二種類の積分の値は、G 数に並進対称性があると仮定することで定義することができる。この仮定は、空間に並進対称性があるとき c 数に並進対称性があることに対応している。つまり、G 数 $\eta$ を $\xi$ だけ並進させた変数を $\eta' = \eta - \xi$ と置き、G 数に並進対称性があるのならば、これら二つの積分の結果は等しくなるはずである。ここで $\int d\eta$ の積分結果は G 数となり、

$$\int d\eta' = \int d\eta \tag{51}$$

であり、また、

$$\int d\eta'\eta' = \int d\eta(\eta - \xi) = \int d\eta\eta + \xi \int d\eta \tag{52}$$

であるから

$$\int d\eta' = 0 \tag{53}$$

が得られる。0 はノルムをもたないので G 数であり、矛盾しない。次に、$\int d\eta\eta$ の値であるが、G 数が二つ組になっていると、他のすべての G 数とは可換となり

$$\int d\eta\eta\xi = \xi \int d\eta\eta \tag{54}$$

となるので、積分の値は c 数になっているはずである。よって、この積分の値を 1 に規格化したもの：

$$\int d\eta\eta = -\int \eta d\eta = 1 \tag{55}$$

を G 数の定義として採用する。また、$\eta$ を実 G 数だとすると

$$\left(\int d\eta\eta\right)^* = \int \eta^* d\eta^* = -\int d\eta^*\eta = 1 \tag{56}$$

が成り立つので

$$d\eta^* = -d\eta \tag{57}$$

が成り立つ。

次に積分変数の変換について考える。N 個の G 数 $\eta_a$ を N 個の G 数 $\theta_a$ に変換したとする。この変数変換に対して積分が不変であるとすれば、ヤコビアンを決定できる。変数変換は

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix} = \hat{M} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{pmatrix} \tag{58}$$

と書ける。ここで $\hat{M}$ は $N \times N$ の行列である。よってある G 数 $\eta_a$ は

$$\eta_a = \sum_{i=1}^{N} M_{ai}\theta_i \tag{59}$$

と書ける。この変数変換のヤコビアン $J_G$ を求めてみよう。G 数の変数を N 個持つ関数を $f$ とすると、積分が変数変換で不変である条件から

$$\int d\eta_1 \cdots d\eta_N f(\eta_1, \cdots, \eta_N) = \int d\theta_1 \cdots d\theta_N J_G f'(\theta_1, \cdots \theta_N) \tag{60}$$

が成り立つ。ここで $f'$ は $f$ を変数変換したものである。ここで、関数 $f$ は $\eta_i$ の多項式で書かれるわけだが、式 (53)(55) の条件からすべての変数 $\eta_1 \cdots \eta_N$ を持つ項のみが積分値を持つことがわかる。この項は変数変換により

$$\eta_1 \cdots \eta_N = \prod_{i=1}^{N} \sum_{j_i=1}^{N} M_{ij_i} \theta_{j_i} \tag{61}$$

となる。これらは G 数を $N$ 個含む多項式の和になっているが、$\theta$ も G 数なので一つでも同じ $\theta_i$ が重複している項はゼロになる。したがって、$\theta_1 \cdots \theta_N$ の全てが含まれる項のみが残り、

$$\eta_1 \cdots \eta_N = \sum_{Q} \varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_N} M_{j_1 1} M_{j_2 2} \cdots M_{j_N N} \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_N \tag{62}$$

となる。ここで、$\sum_Q$ は 1 から N の数字を並び替えてできる $N!$ 個のすべての組 $(j_1, \cdots j_N)$ についての和をとることを意味している。また、$\varepsilon^{j_1 j_2 \cdots j_N}$ はレビ・チビタの記号であり、含まれた数字を $1 \cdots N$ の順番に並び替えるのに要した置換の回数が偶数なら $+1$、奇数なら $-1$ を取る。ここで、$N \times N$ の行列 $\hat{M}$ の行列式が

$$\det M \equiv \sum_{Q} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\cdots} M_{1\alpha} M_{1\beta} M_{3_\gamma} \cdots \tag{63}$$

と定義されることに注意すれば、

$$\eta_1 \cdots \eta_N = \det \hat{M} \theta_1 \theta_2 \cdots \theta_N \tag{64}$$

となる。式 (60) が成り立つためには、ヤコビアン $J_G$ が変数変換により生じた係数 $\det \hat{M}$ を打ち消せばよいので、

$$J_G = (\det \hat{M})^{-1} \tag{65}$$

となる。

### 3.2.5 デルタ関数

G 数のデルタ関数を

$$\int d\eta \delta(\eta - \eta') f(\eta) = f(\eta') \tag{66}$$

で定義する。$f(\eta) = f_1 + f_2 \eta$ と書けるので、

$$\delta(\eta - \eta') = \eta - \eta' \tag{67}$$

とすれば

$$\int d\eta (\eta - \eta') f(\eta) = \int d\eta (\eta - \eta')(f_1 + f_2 \eta) = f_1 + f_2 \eta' = f(\eta') \tag{68}$$

となり、定義を満たしていることがわかる。

### 3.2.6 ガウス積分

次に、ガウス積分を計算しよう。ガウス積分は経路積分表示を行った際に非常に重要になる。まず、複素グラスマン変数 $\eta$ に対して、

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} = 1 \tag{69}$$

が成り立つ。これは、

$$\int d\eta^* d\eta e^{-\eta^* \eta} = \int d\eta^* d\eta (1 - \eta^* \eta) = 1 \tag{70}$$

であることから明らかである。次に、$N$ 個の複素変数 $\eta_1, \cdots, \eta_N$ がある場合の積分は、グラスマン数を要素とするベクトル $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N)$ を用いて

$$\int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 \cdots d\eta_N^* d\eta_N \exp\left[-\boldsymbol{\eta}^\dagger \hat{M} \boldsymbol{\eta}\right] \tag{71}$$

と拡張できる。そもそもフェルミオン系の経路積分表示を行うことがグラスマン数導入の動機だったので、exp の肩にはハミルトニアンが載るとして行列 $\hat{M}$ をエルミートであると仮定する。このとき行列 $\hat{M}$ はユニタリー行列 $\hat{U}$ を用いて対角化でき、

$$\hat{M} = \hat{U}^\dagger \hat{D} \hat{U} \tag{72}$$

となる。ここで $\hat{D}$ は対角行列であり、

$$D_{jk} = \lambda^{(j)} \delta_{jk} \tag{73}$$

という成分を持つ。ここで $\lambda^{(j)}$ は行列 $\hat{M}$ の $j$ 番目の固有値である。式 (72) を式 (71) に代入し $\boldsymbol{\eta} = \hat{U}\boldsymbol{\xi}$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}
\int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 \cdots d\eta_N^* d\eta_N \exp\left[-\boldsymbol{\eta}^\dagger \hat{U}^\dagger \hat{D} \hat{U} \boldsymbol{\eta}\right] &= \int d\xi_1^* d\xi_1 d\xi_2^* d\xi_2 \cdots d\xi_N^* d\xi_N (\det \hat{U}^\dagger)^{-1} (\det \hat{U})^{-1} \exp\left[-\boldsymbol{\xi}^\dagger \hat{D} \boldsymbol{\xi}\right] \\
&= \int d\xi_1^* d\xi_1 d\xi_2^* d\xi_2 \cdots d\xi_N^* d\xi_N \exp\left[-\sum_{j,k} \xi_j^* \lambda^{(j)} \delta_{jk} \xi_k\right] \qquad (74) \\
&= \int d\xi_1^* d\xi_1 d\xi_2^* d\xi_2 \cdots d\xi_N^* d\xi_N \exp\left[-\sum_{j} \lambda^{(j)} \xi_j^* \xi_j\right] \qquad (75) \\
&= \prod_{j=1}^{N} \int d\xi_j^* d\xi_j \exp\left[-\lambda^{(j)} \xi_j^* \xi_j\right] \qquad (76) \\
&= \prod_{j=1}^{N} \int d\xi_j^* d\xi_j (1 - \lambda^{(j)} \xi_j^* \xi_j) \qquad (77) \\
&= \prod_{j=1}^{N} \lambda^{(j)} \qquad (78)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\det(\hat{A}\hat{B}) = \det \hat{A} \det \hat{B} \tag{79}$$

を用いた。さらに、

$$\det \hat{M} = \det \hat{U}^\dagger \det \hat{D} \det \hat{U} = \det \hat{D} = \prod_{j=1}^{N} \lambda^{(j)} \tag{80}$$

を使えば

$$\int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 \cdots d\eta_N^* d\eta_N \exp\left[-\boldsymbol{\eta}^\dagger \hat{M} \boldsymbol{\eta}\right] = \det \hat{M} \tag{81}$$

となる。

このガウス積分をさらに拡張し $\eta$ の線形項を含む積分も計算できる。つまり、新しい N 個の G 数 $K_j$ を導入した

$$\int d\eta_1^* d\eta_1 d\eta_2^* d\eta_2 \cdots d\eta_N^* d\eta_N \exp\left[-\boldsymbol{\eta}^\dagger \hat{M} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{K}^\dagger \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^\dagger \boldsymbol{K}\right] = I \tag{82}$$

は計算できる。変数変換 $\boldsymbol{\eta} = \hat{U}\boldsymbol{\xi}$ を用いると

$$\begin{aligned}
I &= \int d\xi_1^* d\xi_1 \cdots d\xi_N^* d\xi_N \exp\left[\sum_j -\xi_j^* \lambda^{(j)} \xi_j + K_j^* (\hat{U}\boldsymbol{\xi})_j + (\hat{U}\boldsymbol{\xi})_j^\dagger K_j\right] && (83)\\
&= \int d\xi_1^* d\xi_1 \cdots d\xi_N^* d\xi_N \exp\left[\sum_j -\xi_j^* \lambda^{(j)} \xi_j + (\hat{U}^\dagger \boldsymbol{K})_j^\dagger \xi_j + \xi_j^* (\hat{U}^\dagger \boldsymbol{K})_j\right] && (84)\\
&= \int d\xi_1^* d\xi_1 \cdots d\xi_N^* d\xi_N \exp\left[\sum_j -\lambda^{(j)} \left(\xi_j^* - \frac{1}{\lambda^{(j)}}(\hat{U}^\dagger \boldsymbol{K})_j\right)\left(\xi_j - \frac{1}{\lambda^{(j)}}(\hat{U}^\dagger \boldsymbol{K})_j^\dagger\right) + (\hat{U}^\dagger \boldsymbol{K})_j \frac{1}{\lambda^{(j)}}(\hat{U}^\dagger \boldsymbol{K})_j^\dagger\right] &&\\
&= \int d\xi_1^* d\xi_1 \cdots d\xi_N^* d\xi_N \exp\left[\boldsymbol{K}^\dagger \hat{M}^{-1}\boldsymbol{K} - \sum_j \lambda^{(j)} \left(\xi_j^* - \frac{1}{\lambda^{(j)}}(\hat{U}^\dagger \boldsymbol{K})_j\right)\left(\xi_j - \frac{1}{\lambda^{(j)}}(\hat{U}^\dagger \boldsymbol{K})_j^\dagger\right)\right] && (85)\\
&= e^{\boldsymbol{K}^\dagger \hat{M}^{-1}\boldsymbol{K}} \prod_j^N \int d\xi_j^* d\xi_j \exp\left[-\lambda^{(j)} \left(\xi_j^* - \frac{1}{\lambda^{(j)}}(\hat{U}^\dagger \boldsymbol{K})_j\right)\left(\xi_j - \frac{1}{\lambda^{(j)}}(\hat{U}^\dagger \boldsymbol{K})_j^\dagger\right)\right] && (86)
\end{aligned}$$

となる。ここで、G 数の並進対称性を用いれば

$$I = \exp\left[\boldsymbol{K}^\dagger \hat{M}^{-1}\boldsymbol{K}\right] \det \hat{M} \tag{87}$$

が得られる。

#### 3.2.7 まとめ

以上、得られた結果をまとめると

$$\begin{aligned}
f(x,\eta) &= f_1(x) + f_2(x)\eta && (88)\\
e^\eta &= 1 + \eta && (89)\\
\frac{\partial}{\partial \eta_b}(\eta_a \cdots \eta_b \cdots \eta_c) &= (-1)^P (\eta_a \cdots \eta_b) && (90)\\
\int d\eta &= 0 && (91)\\
\int d\eta \eta &= 1 && (92)\\
J_G &= (\det \hat{M})^{-1} && (93)\\
\delta(\eta - \eta') &= \eta - \eta' && (94)\\
\int d\eta_1^* d\eta_1 \cdots d\eta_N^* d\eta_N \exp\left[-\boldsymbol{\eta}^\dagger \hat{M} \boldsymbol{\eta}\right] &= \det \hat{M} && (95)\\
\int d\eta_1^* d\eta_1 \cdots d\eta_N^* d\eta_N \exp\left[-\boldsymbol{\eta}^\dagger \hat{M} \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{K}^\dagger \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^\dagger \boldsymbol{K}\right] &= \exp\left[\boldsymbol{K}^\dagger \hat{M}^{-1}\boldsymbol{K}\right] \det \hat{M} && (96)
\end{aligned}$$

となる。

### 3.3 経路積分表示

フェルミオン系ではグラスマン数を用いたコヒーレント状態を用いて経路積分表示をすればよいことがわかった。状態和 $Z$ の表式は結局

$$Z = \int \mathcal{D}c^\dagger \mathcal{D}c \exp\left[-\int_0^\beta d\tau \mathcal{L}(c^\dagger, c)\right] \tag{97}$$

と書ける。いままでの話からわかったことは、グラスマン数 $c^\dagger$、$c$ でガウス積分の形に書ければ積分が実行できるということである。相互作用が入っている場合は、ハミルトニアンは生成消滅演算子の四次で書かれているのでそのままでは積分できない。たとえばハバード模型のハミルトニアンを

$$\mathcal{H} = \sum_{i\sigma} -\mu_0 c^\dagger_{i\sigma} c_{i\sigma} - \sum_{i,i',\sigma} t_{ii'} c^\dagger_{i\sigma} c_{i'\dagger} + U \sum_i c^\dagger_{i\uparrow} c_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} c_{i\downarrow} \tag{98}$$

とすればラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \sum_{i\sigma} c^\dagger_{i\sigma} (\partial_\tau - \mu_0) c_{i\sigma} - \sum_{i,i',\sigma} t_{ii'} c^\dagger_{i\sigma} c_{i'\dagger} + U \sum_i c^\dagger_{i\uparrow} c_{i\uparrow} c^\dagger_{i\downarrow} c_{i\downarrow} \tag{99}$$

となる。これは四次の項があるので、解析するにはたとえば「ストラトノビッチーハバード変換」などを用いて

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}c^\dagger \mathcal{D}c \exp\left[ -\int_0^\beta d\tau \mathcal{L}(\phi, c^\dagger, c) \right] \tag{100}$$

という新しい場 $\phi$ を用いて書き直し、$c^\dagger$、$c$ についての積分を実行したりする。

## 参考文献

J. M. ザイマン「現代量子論の基礎」　丸善プラネット株式会社
A. M. ザゴスキン「多体系の量子論＜技法と応用＞」　シュプリンガー・フェアラーク東京
永長直人「物性論における場の量子論」　岩波書店
M. S. スワンソン「経路積分法-量子力学から場の理論へー」　吉岡書店
大貫義郎 *et al.*「経路積分の方法」　岩波書店
斯波弘行「電子相関の物理」　岩波書店