

Keldysh 形式の非平衡 Green 関数の導入

永井佑紀

平成 19 年 6 月 11 日

以前までのノートにおいて、熱平衡状態（あるいは絶対零度）における相互作用のある系の期待値を相互作用の無い系の期待値を用いてあらわす方法をまとめた。このノートでは、非平衡 Green 関数について考える。熱平衡状態（あるいは絶対零度）と何が異なるのか、ということをはかるように書こうと思う。また、Keldysh 形式の非平衡 Green 関数では、Feynman diagram による摂動展開を行いたいがために Keldysh space を導入しているように思える。そこで、Feynman diagram とは何なのかを考えるため絶対零度の Feynman diagram についても軽くまとめた。

1 物理量の期待値と Green 関数と Feynman diagram

1.1 Green 関数

まず、熱平衡状態における物理量の期待値について、復習をかねてこの節で触れておくことにする¹。
有限温度における物理量の期待値は

$$\langle A_H(t) \rangle = \text{Tr} [\rho_H A_H(t)] \quad (1)$$

と書ける。ここで、 ρ_H は密度行列演算子であり、Heisenberg 表示では時間変化しない。この相互作用のある系の期待値 $\langle \dots \rangle$ を相互作用表示の演算子 $A_I(t)$ と相互作用の無い系の期待値 $\langle \dots \rangle_0$ で書き直すと、

$$\langle A_H(t) \rangle = \langle U(-\infty, t) A_I(t) U(t, -\infty) \rangle_0 \quad (2)$$

となる。ここで、 $U(t, t_0)$ は t_0 から t への時間発展演算子であり、

$$U(t, t_0) = T \left[\exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' H_1(t') \right\} \right] \quad (3)$$

である²。 $U(-\infty, t) = U(-\infty, \infty) U(\infty, t)$ と T 積を用いて期待値を書き直すと

$$\langle A_H(t) \rangle = \langle U(-\infty, \infty) T[U(\infty, -\infty) A_I(t)] \rangle_0 \quad (4)$$

となる。絶対零度においては、無限の過去の相互作用の無い状態 $|\Psi_0\rangle$ は、無限の未来まで時間発展させると

$$U(\infty, -\infty) |\Psi_0\rangle = e^{iL} |\Psi_0\rangle \quad (5)$$

という位相因子だけ最初の状態と異なる状態に変わる。このとき、

$$\langle A_H(t) \rangle = e^{-iL} \langle T[U(\infty, -\infty) A_I(t)] \rangle_0 \quad (6)$$

と書ける。Green 関数は $e^{iL} = \langle U(\infty, -\infty) \rangle_0$ を用いれば³、

$$\langle T[\phi(x) \psi^\dagger(x')] \rangle = \frac{\langle T[U(\infty, -\infty) \phi_I(x) \phi_I^\dagger(x')] \rangle_0}{\langle U(\infty, -\infty) \rangle_0} \quad (7)$$

となる。ここで x は空間座標と時間を含む。

¹より詳しいことは以前のノート「密度行列演算子の時間発展と物理量の期待値」を参照。

²以前のノート「相互作用表示と時間発展演算子」参照。

³以前のノート「密度行列演算子の時間発展と物理量の期待値」参照。

1.2 Feynman diagram

さて、非平衡 Green 関数について考える前に、絶対零度における Feynman diagram について考える。時間発展演算子を展開すると、

$$U(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t_1} dt_n T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)] \quad (8)$$

と書けるので、Green 関数は

$$\langle T[\phi(x)\psi^\dagger(x')] \rangle = \frac{\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n) \phi_I(x) \phi_I^\dagger(x')] \rangle_0}{\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)] \rangle_0} \quad (9)$$

と書ける。この無数の演算子を含む T 積を、Wick の定理を用いて摂動展開する。この展開方法は Feynman diagram を用いて書くことができる。Feynman diagram を描く規則の説明は他の本に譲る。ここで強調しておくべきことは、diagram のうち「非連結」なものは分母とキャンセルして消えてなくなるということである。Green 関数の分子の摂動の ν 次の項は

$$\langle \frac{1}{\nu!} (-i)^\nu \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_\nu T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_\nu) \phi_I(x) \phi_I^\dagger(x')] \rangle_0 \quad (10)$$

と書けるが、 m 次の連結部分と n 次の非連結部分に分けることを考える。全部で ν 個の相互作用演算子 $H_1(t_i)$ を m 個と n 個に分ける組み合わせの数は $\nu!/(m!n!)$ であるので、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m+n, \nu} \frac{1}{\nu!} \frac{\nu!}{m!n!} (-i)^{m+n} \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \langle T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_m) \phi_I(x) \phi_I(x')] \rangle_{0, \text{connected}} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_{m+1} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_\nu \langle T[H_1(t_{m+1}) \cdots H_1(t_\nu)] \rangle_0 \end{aligned} \quad (11)$$

と書ける。ここで $\delta_{m+n, \nu}$ は可能なすべての連結と非連結の組み合わせを取るために導入している。よって、Green 関数の分子は ν に関する和をとればよいので

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{m+n, \nu} \frac{1}{\nu!} \frac{\nu!}{m!n!} (-i)^{m+n} \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \langle T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_m) \phi_I(x) \phi_I(x')] \rangle_{0, \text{connected}} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_{m+1} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_\nu \langle T[H_1(t_{m+1}) \cdots H_1(t_\nu)] \rangle_0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} (-i)^{m+n} \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \langle T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_m) \phi_I(x) \phi_I(x')] \rangle_{0, \text{connected}} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_{m+1} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_{n+m} \langle T[H_1(t_{m+1}) \cdots H_1(t_{n+m})] \rangle_0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \langle T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_m) \phi_I(x) \phi_I(x')] \rangle_{0, \text{connected}} \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{m+1} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_{n+m} \langle T[H_1(t_{m+1}) \cdots H_1(t_{n+m})] \rangle_0 \end{aligned} \quad (14)$$

となる。そして、最後の非連結部分の積は全部で n 個の T 積でありすべて H_1 であるから積分変数を取り替えることができるので

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \langle T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_m) \phi_I(x) \phi_I(x')] \rangle_{0, \text{connected}} \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \langle T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)] \rangle_0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \langle T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_m) \phi_I(x) \phi_I(x')] \rangle_{0, \text{connected}} \\ & \times \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)] \right\rangle_0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$= \langle U(\infty, -\infty) \rangle_0 \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \times \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_m \langle T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_m) \phi_I(x) \phi_I(x')] \rangle_{0, \text{connected}} \quad (17)$$

となる。よって、Green 関数の分子の非連結部分は分母とキャンセルすることがわかる。そもそも非連結部分とは、変数 x, x' が含まれていない部分である。つまり、 x' から x へと伝播する仮想的な粒子が、系の他の部分と相互作用していないダイアグラムをあらわしており、そのような相互作用しないダイアグラムは Green 関数には利いてこないことを意味している。非連結ダイアグラムは「真空のダイアグラム」とも呼ばれる。

有限温度においては、無限の未来の相互作用の無い状態が、無限の過去の状態と位相因子のみ異なる状態にならない。つまり、初期条件や相互作用の形、その加え方や除き方に依存して、系の励起状態のあらゆる線形結合状態に移行しうる。その結果、絶対零度における Green 関数の分母を簡約することができず、絶対零度における形式は全く成立しなくなる。そこで、時間発展演算子 $U = e^{-iHt}$ と（規格化因子を除いた）熱平衡状態時の密度行列演算子 $\hat{\rho} = e^{-\beta H}$ の類似性を利用する方法が松原によって提案された。虚時間を用いた温度 Green 関数は実時間を用いた熱平衡 Green 関数と密接な関係を持ち、この温度 Green 関数に対しては以前のノートでも見たように絶対零度のときと形式が同じダイアグラムの方法を構築することが可能である。

2 非平衡状態における Green 関数

2.1 有限温度におけるもう一つの方法

有限温度の Green 関数を扱う方法は、温度（松原）Green 関数を用いる方法のほかに、Keldysh によって考案された方法がある。この方法は、Green 関数が行列になり計算がより煩雑になる。しかし、非平衡状態まで拡張できるという利点を持つ。

物理量の期待値は

$$\langle A_H(t) \rangle = \langle U(-\infty, \infty) T[U(\infty, -\infty) A_I(t)] \rangle_0 \quad (18)$$

と書ける。ここで、 $U(-\infty, \infty)$ は時間をさかのぼる演算子であり、 $U^\dagger(t, t_0) = U(t_0, t)$ であるから

$$U(t_0, t) = \tilde{T} \left[\exp \left\{ i \int_{t_0}^t dt' H_1(t') \right\} \right] \quad (19)$$

である。 \tilde{T} は反時間順序化演算子と呼ばれ、演算子 T と逆の順序に並び替える演算子である。時間発展演算子を展開して式 (18) を書き直すと

$$\langle A_H(t) \rangle = \left\langle \tilde{T} \left[\exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_1(t') \right\} \right] T \left[\exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_1(t') \right\} A_I(t) \right] \right\rangle_0 \quad (20)$$

$$= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_n \tilde{T}[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_m T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_m) A_I(t)] \right\rangle_0 \quad (21)$$

となる。これを Wick の定理でばらすことで物理量の計算を行うことができる。しかし、 T 積の中の演算子同士や \tilde{T} 積の中の演算子同士で固めてばらすのは通常の Green 関数と似たような状況だからわかりやすいが、 \tilde{T} 積の中から一つ T 積の中から一つ取ってきて固めてばらす場合は少しややこしい。どうややこしいかは、物理量 A の期待値ではなく、Green 関数を Wick の定理でばらすことを考えることで見ていく。

Green 関数は通常

$$G(x, x') \equiv -i\langle T[\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle \quad (22)$$

と定義される。ここで $x = (\mathbf{r}, t)$ である。この Green 関数を、物理量 A の期待値と同様に相互作用の無い状態における期待値と関連付けると

$$G(x, x') = -i\langle U(-\infty, \infty)T[U(\infty, -\infty)\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle_0 \quad (23)$$

となる。さらにここで、contour ordering という演算子 T_c を導入する。この演算子は

$$T_c[A(t_1)B(t_2)] = \begin{cases} A(t_1)B(t_2), & t_1 >_c t_2 \\ \mp B(t_2)A(t_1), & t_2 >_c t_1 \end{cases} \quad (24)$$

と定義されており⁴、ある時間経路 c に沿ったときの大小関係によって並び替える演算子である。経路 c を無限の過去 $t = -\infty$ から無限の未来 $t = \infty$ へ行きまた無限の過去 $t = -\infty$ へ戻る経路とすれば (図.1 参照)、式 (23) は

$$G(x, x') = -i\langle T_c[U_c\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)] \rangle_0 \quad (25)$$

と書ける。ここで、

$$U_c \equiv T_c \left[\exp \left\{ -i \int_c dt' H_1(t') \right\} \right] = U(-\infty, \infty)U(\infty, -\infty) \quad (26)$$

である「経路 c に沿った時間発展演算子」を導入した。 x^- というのは、時間経路 c の上の部分 c_1 において測定が行われることを意味する。これは式 (23) において $U(-\infty, \infty)$ が一番左側にあることに対応している。

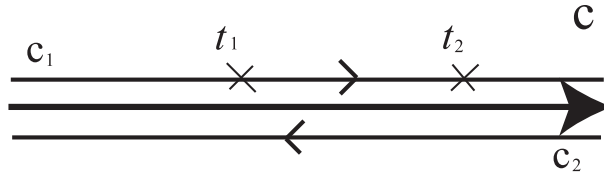


図 1: 時間経路 c 。上の経路は c_1 、下の経路は c_2 。×印は測定が行われる時間。

絶対零度のとき、Wick の定理を用いて展開することの利点の一つは、展開後の期待値が相互作用の無い Green 関数

$$G_0(x, x') \equiv -i\langle T[\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle_0 \quad (27)$$

によって表すことができる点であった。この利点によって、Feynman diagram という便利な手法で Green 関数を計算できた。では、有限温度における Green 関数 (25) を Wick の定理でばらすとどのようになるだろうか。

具体的に考えてみる。相互作用項が

$$H_1 = W\phi^\dagger(x)\phi(x) \quad (28)$$

であるとする。このとき、一次の Green 関数 $G^{(1)}$ は

$$G^{(1)}(x, x') = -W \int_c dt_1 \langle T_c[\phi^\dagger(x_1)\phi(x_1)\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)] \rangle_0 \quad (29)$$

となる。これを Wick の定理でばらす。まず、 T_c 積を T 積と \tilde{T} 積にばらすと

$$G^{(1)}(x, x') = -W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle T[\phi^\dagger(x_1)\phi(x_1)\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)] \rangle_0 + W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle \tilde{T}[\phi^\dagger(x_1)\phi(x_1)\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)] \rangle_0 \quad (30)$$

⁴符号は上がフェルミオン下がボソンである。

となる。第一項の T 積は Wick の定理から

$$\langle T[\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 \langle T[\phi(x_1)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0, \quad -\langle T[\phi^\dagger(x_1)\phi(x_1)]\rangle_0 \langle T[\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 \quad (31)$$

となり、第二項の \tilde{T} 積は

$$\langle \tilde{T}[\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 \langle \tilde{T}[\phi(x_1)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0, \quad -\langle \tilde{T}[[\phi^\dagger(x_1)\phi(x_1)]]\rangle_0 \langle \tilde{T}[\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 \quad (32)$$

であり、 x^- は時間経路 c の c_1 側に属していることを考えると \tilde{T} 積をとることができて、

$$\langle [\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 \langle [-\phi^\dagger(x'^-)\phi(x_1)]\rangle_0, \quad -\langle \tilde{T}[[\phi^\dagger(x_1)\phi(x_1)]]\rangle_0 \langle \tilde{T}[\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 \quad (33)$$

となる。よって、Green 関数は

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x, x') &= -W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle T[\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 \langle T[\phi(x_1)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 + W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle T[\phi^\dagger(x_1)\phi(x_1)]\rangle_0 \langle T[\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 \\ &\quad -W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle [\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 \langle [\phi^\dagger(x'^-)\phi(x_1)]\rangle_0 - W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle \tilde{T}[[\phi^\dagger(x_1)\phi(x_1)]]\rangle_0 \langle \tilde{T}[\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 \\ &= -W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle T[\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 \langle T[\phi(x_1)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 - W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 n_0(x_1) \langle T[\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 \\ &\quad -W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle [\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 \langle [\phi^\dagger(x'^-)\phi(x_1)]\rangle_0 + W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 n_0(x_1) \langle \tilde{T}[\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle T[\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 \langle T[\phi(x_1)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 - W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle [\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 \langle [\phi^\dagger(x'^-)\phi(x_1)]\rangle_0 \\ &\quad -W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 n_0(x_1) \left(\langle T[\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 - \langle \tilde{T}[\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 \right) \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle T[\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 \langle T[\phi(x_1)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 - W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle [\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 \langle [\phi^\dagger(x'^-)\phi(x_1)]\rangle_0 \quad (36) \end{aligned}$$

となる⁵。ここで、 $n_0(x_1) \equiv \langle \phi^\dagger(x_1)\phi(x_1) \rangle_0$ は非摂動の系の粒子密度である。

得られた式を眺めると、第一項は $-i\langle T[\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0 = G_0(x^-, x_1)$ と $-i\langle T[\phi(x_1)\phi^\dagger(x'^-)]\rangle_0 = G_0(x_1, x'^-)$ という相互作用の無い場合の Green 関数 (27) で書くことができることがわかる。第二項は、 $\langle [\phi(x^-)\phi^\dagger(x_1)]\rangle_0$ と $\langle [\phi^\dagger(x'^-)\phi(x_1)]\rangle_0$ の積からなるので、 G_0 とは若干異なる。そこで、次の節で新しい Green 関数を導入する。

2.2 行列形式の Green 関数

新しい Green 関数

$$\hat{G}_0(x, x') \equiv -i\langle T_c[\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle_0 \quad (37)$$

を定義する。この Green 関数は contour ordering によって定義されているので、 x, x' の関係によって

$$\hat{G}_0(x, x') = \begin{cases} -i\langle T[\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle_0, & x, x' \in c_1 \\ -i\langle \phi(x)\phi^\dagger(x') \rangle_0, & x \in c_2, x' \in c_1 \\ \pm i\langle \phi^\dagger(x')\phi(x) \rangle_0, & x' \in c_2, x \in c_1 \\ -i\langle \tilde{T}[\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle_0, & x, x' \in c_2 \end{cases} \quad (38)$$

という四通りに場合わけされる。これを行列表示すると

$$\hat{G}_0(x, x') \equiv \begin{pmatrix} -i\langle T[\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle_0 & -i\langle \phi(x)\phi^\dagger(x') \rangle_0 \\ \pm i\langle \phi^\dagger(x')\phi(x) \rangle_0 & -i\langle \tilde{T}[\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle_0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} G_0^{--}(x, x') & G_0^{+-}(x, x') \\ G_0^{-+}(x, x') & G_0^{++}(x, x') \end{pmatrix} \quad (40)$$

⁵第三項は T 積と \tilde{T} 積をステップ関数で表現すれば消えることはすぐにわかる。

と書くことができる⁶。この四つの相互作用の無い場合の Green 関数を用いると、式 (36) は

$$G(x, x') = -W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 iG_0^{--}(x, x_1) iG_0^{--}(x_1, x') - W \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 (-i)G_0^{+-}(x, x_1) iG_0^{+-}(x', x_1) \quad (41)$$

と書くことができる。このように書くと、添え字として + や - がつくということを考えなければいけないが、Feynman diagram の手法を使うことができる。たとえば式 (41) は図. 2 のように書ける。さて、この Green 関数は

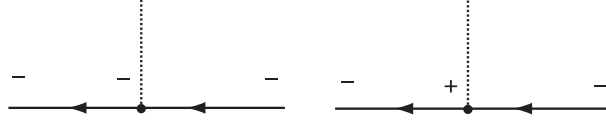


図 2: 非平衡 Green 関数の一次のダイアグラム。

$$\hat{G}(x, x') \equiv \begin{pmatrix} -i\langle T[\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle & -i\langle \phi(x)\phi^\dagger(x') \rangle \\ \pm i\langle \phi^\dagger(x')\phi(x) \rangle & -i\langle \tilde{T}[\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\equiv \begin{pmatrix} G^{--}(x, x') & G^{+-}(x, x') \\ G^{-+}(x, x') & G^{++}(x, x') \end{pmatrix} \quad (43)$$

を用いれば

$$G(x, x') \equiv -i\langle T[\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle \quad (44)$$

$$= -i\langle T_c[\phi(x^-)\phi^\dagger(x'^-)] \rangle \quad (45)$$

$$= G^{--}(x, x') \quad (46)$$

と書ける。すなわち、 $G(x, x')$ を展開することは $G^{--}(x, x')$ を展開することと等しい。そこで、 $G^{--}(x, x')$ ではなく \hat{G} を一次まで展開するとどうなるだろうか。その結果は

$$\hat{G}^{(1)}(x, x') = \begin{pmatrix} iG_0^{--}(-W)iG_0^{--} + iG_0^{+-}WiG_0^{+-} & iG_0^{--}(-W)iG_0^{+-} + iG_0^{+-}WiG_0^{++} \\ iG_0^{+-}(-W)iG_0^{--} + iG_0^{++}WiG_0^{+-} & iG_0^{+-}(-W)iG_0^{+-} + iG_0^{++}WiG_0^{++} \end{pmatrix} \quad (47)$$

となる。ここで、 x と x' 以外のすべての空間変数座標変数にわたって積分を行うこととして、積分記号は省略した。行列形式の外場を

$$\hat{W} \equiv \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & -W \end{pmatrix} = W\hat{\tau}_3 \quad (48)$$

と定義すれば⁷、

$$\hat{G}^{(1)}(x, x') = i\hat{G}_0 \cdot \hat{W} \cdot i\hat{G}_0 \quad (49)$$

という簡潔な表現を得ることができる。このダイアグラムは図. 3 のように書け、これは同じ外場がある場合の絶対零度の Green 関数を Feynman diagram で展開したときの一次のダイアグラムに等しい。行列形式を用いると、添え字を気にする必要がなくなる。つまり、非平衡有限温度系において通常の Feynman diagram による展開方法を使うことができる。

2.3 簡約定理

絶対零度における Green 関数の展開においては、分子の非連結ダイアグラムは分母とキャンセルし、Green 関数には連結ダイアグラムしか寄与しなかった。非平衡 Green 関数の場合は、一番単純な外場を入れた系では非連

⁶ G^{+-} の +- は x が c_1 の経路 (-)、 x' が c_2 の経路 (+) であることを意味している。

⁷ $\hat{\tau}_3$ は Pauli 行列のひとつである。

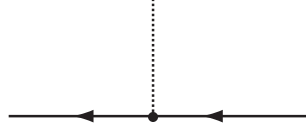


図 3: 行列形式の非平衡 Green 関数の一次のダイアグラム。

結ダイアグラムが現れないことを確認した。Feynman diagram が絶対零度の場合と同様に使えるための条件は、Wick の定理が使えるということと、非連結ダイアグラムが寄与しないことつまり簡約定理が成り立つこと、という二つが必要である。非平衡 Green 関数の展開においても非連結ダイアグラムが寄与しないことを直感的に説明することをこの節では試みる。

時間発展演算子を用いた

$$\langle U(-\infty, \infty)U(\infty, -\infty) \rangle_0 = 1 \quad (50)$$

という関係式が成り立つ。これは、何も測定を行わず無限の過去から無限の未来へ行ってまた戻ってくれば可逆変化であるために正しい。非平衡 Green 関数は

$$\hat{G}(x, x') = \langle T_c[U_c \phi(x) \phi^\dagger(x')] \rangle_0 \quad (51)$$

$$= \langle T_c[U(-\infty, \infty)U(\infty, -\infty)\phi(x)\phi^\dagger(x')] \rangle_0 \quad (52)$$

と書ける。非連結ダイアグラムとは、仮想的に付け加え取り去られる $(\phi(x)\phi^\dagger(x'))$ 過程に関与しないダイアグラムである。逆に言えばこの仮想的粒子が系のほかの部分と全く相互作用しない過程をあらわしたダイアグラムである。たとえば ν 次のダイアグラムであれば、 m 次の連結ダイアグラムと n 次の非連結ダイアグラムの積となっている⁸。ここで、 n 次の非連結ダイアグラムは、経路 c_1 を経て経路 c_2 を経る過程において仮想的な粒子が一度も付け加え取り去られることがなかったということを意味する。その結果、経路 c_1 による変化が c_2 によって正確に打ち消されることになる。具体的に見れば

$$T[A(t_1)B(t_2)] - \tilde{T}[A(t_1)B(t_2)] = A(t_1)B(t_2)\theta(t_1 - t_2) \mp B(t_2)A(t_1)\theta(t_2 - t_1) \\ - (A(t_1)B(t_2)\theta(t_2 - t_1) \mp B(t_2)A(t_1)\theta(t_1 - t_2)) \quad (53)$$

$$= 0 \quad (54)$$

なので⁹、 x や x' が積の中に入って

$$T[A(t_1)\phi(x)] - \tilde{T}[A(t_1)\phi^\dagger(x')] \neq 0 \quad (55)$$

のようにならなければ経路 c_1 の変化は経路 c_2 の変化で打ち消されて消えてしまう。非連結ダイアグラムには、 x 、 x' は一つも入っていないので常に式 (54) のような形になってしまう。つまり、 x や x' によって経路 c_1 と経路 c_2 を非同値にする連結ダイアグラムだけが Green 関数の展開に寄与するのである。

2.4 ここまでのまとめ

以上から、非平衡 Green 関数を摂動展開する際には四つの Green 関数を定義する必要があり、行列形式が Feynman diagram による方法を非平衡 Green 関数に用いるために便利な形式であることがわかった。実は、四つの Green 関数は互いに独立ではなく、Keldysh space を用いると行列要素の一つが 0 となる形に書き直すことができる。このことに関してはこのノートでは触れない¹⁰。

⁸ $n + m = \nu$

⁹ 式 (36) の計算を参照。

¹⁰ 文献参照。また非平衡 Green 関数に関するノートを作ったときには書くだろう。

参考文献

P. N. Keldysh, Soviet Physics JETP **20** 1018 (1965).

小栗章、「微小な系の電気伝導：多体効果と非平衡電流に関する理論」ノート 物性若手夏の学校テキスト『物性論研究』 vol.71 pp.449-462 (1998).」

A. M. ザゴスキ、**「多体系の量子論<技法と応用>」**(シュプリンガー・フェアラーク東京)

G. D. Mahan, "Many-Particle Physics" second edition

N. Kopnin, "Theory of Nonequilibrium Superconductivity" (Oxford Science Publications)

J. Rammer and H. Smith, Rev. Mod. Phys. **58** (1986), 323.