

フォノンを媒介とした電子電子相互作用 BCS 有効ハミルトニアン²の導出

永井佑紀

平成 19 年 5 月 19 日

フォノンを媒介とした電子電子相互作用が引力となることを示す。また、BCS の有効ハミルトニアンを導出する。¹ $\hbar = k_B = 1$ という単位系を用いる。

1 時間依存しない摂動論：時間発展演算子を用いた導出

ハミルトニアンが

$$H = H_0 + H_1 \quad (1)$$

で表されるとする。ここで、 H_1 は断熱的に取り入れるとする。つまり、無限の過去と無限の未来ではハミルトニアンは H_0 であるハミルトニアン²

$$H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (H_0 + H_1 e^{-\epsilon|t|}) \quad (2)$$

を考える。このとき、無限の過去から $t = 0$ までの時間発展演算子は

$$U_\epsilon(0, -\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n \int_{-\infty}^0 \cdots \int_{-\infty}^0 dt_1 \cdots dt_n e^{\epsilon(t_1 + \cdots + t_n)} T[H_1(t_1) \cdots H_1(t_n)] \quad (3)$$

と書ける。ここで、 $H_1(t_i)$ は相互作用表示 $H_1(t_i) = e^{iH_0 t_i} H_1 e^{-iH_0 t_i}$ である。

さて、 H_1 を摂動として考えることにしよう。量子力学の教科書にある摂動論と同様に、 $H_1 \rightarrow \lambda H_1$ と置きなおしておく。このとき、時間発展演算子を λ のべきがわかるようにあらわに書くと

$$U_\epsilon(0, -\infty) = 1 - i\lambda \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{\epsilon t_1} H_1(t_1) + \lambda^2 \frac{(-i)^2}{2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 dt_1 dt_2 e^{\epsilon(t_1 + t_2)} H_1(t_1) H_1(t_2) + \cdots \quad (4)$$

となる。したがって、基底状態 $|0\rangle$ からある終状態 $|m\rangle$ への遷移確率を λ の一次は、

$$\langle f|U_1(0, -\infty)|0\rangle = \langle m| \left(1 - i\lambda \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{\epsilon t_1} e^{iH_0 t_1} H_1 e^{-iH_0 t_1} \right) |0\rangle \quad (5)$$

$$= \langle m| -i\lambda \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{\epsilon t_1} e^{iE_m t_1} H_1 e^{-iE_0 t_1} |0\rangle \quad (6)$$

$$= -i\lambda \int_{-\infty}^0 dt_1 \langle m|H_1|0\rangle e^{i(-i)\epsilon t_1} e^{i(E_m - E_0)t_1} \quad (7)$$

$$= -i\lambda \int_{-\infty}^0 dt_1 \langle m|H_1|0\rangle e^{i(E_m - E_0 - i\epsilon)t_1} \quad (8)$$

$$= -\lambda \frac{\langle m|H_1|0\rangle}{E_m - E_0 - i\epsilon} \quad (9)$$

¹物性理論の M 1 部屋の後輩達に質問されて答えられなかったのが悔しかったのでノートを作ることにした。

²以前のノート「断熱定理の証明」を参照。

となる³。量子力学の教科書で学んだ時間依存しない摂動論においては、一次摂動の波動関数 $|n^{(1)}\rangle$ は

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_m C_m |m^{(0)}\rangle \quad (10)$$

と書けた。式 (9) は一次摂動の波動関数を $|0^{(1)}\rangle$ としたときの $\langle m^{(0)}|0^{(1)}\rangle = C_m$ に他ならない。よって、 $\epsilon \rightarrow 0$ という極限をとれば

$$|0^{(1)}\rangle = \sum_m -\lambda \frac{\langle m|H_1|0\rangle}{E_m - E_0} |m^{(0)}\rangle \quad (11)$$

であり、これは通常の手順で導く一次摂動の波動関数と等しい。

以上の議論から、時間発展演算子を λ で展開したときの次数は通常摂動論における次数と等しいことがわかる。つまり、二次摂動の波動関数を導出したければ同様に計算すればよい。1 次の摂動は式 (9) と書け、二次摂動は

$$\langle f|U_2(0, -\infty)|0\rangle = \sum_p \frac{\langle f|H_1|p\rangle \langle p|H_1|0\rangle}{(E_f - E_0 - 2i\epsilon)(E_p - E_0 - i\epsilon)} \quad (12)$$

と書ける⁴。二次摂動ではある中間状態を経由して終状態へ達している。以上のことを踏まえて、電子電子引力相互作用の有効ハミルトニアンを導出を行う。

2 有効ハミルトニアンの導出

2.1 電子格子相互作用

電子格子相互作用のハミルトニアンは

$$H_{ep} = i \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} D_{\mathbf{q}} (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \quad (13)$$

と書ける⁵。ここで、 $a^{(\dagger)}$ と $c^{(\dagger)}$ はそれぞれフォノンと電子の消滅 (生成) 演算子である。全体のハミルトニアンを

$$H = H_0 + \lambda H_{ep} \quad (14)$$

と書く。 H_{ep} を摂動として考える。摂動の一次はある電子がフォノンを一つ放出したり吸収したりするプロセスであり、電子散乱やフォノンによる電気抵抗等を表す。この場合は始状態か終状態にフォノンを持つ行列要素がゼロでない値を持つ。摂動の二次はある電子がフォノンを放出 (吸収) し、また (放出) 吸収するプロセスであり、放出したフォノンを同じ電子が吸収した場合は自己エネルギー、違う電子が吸収した場合は電子電子相互作用を表す。

2.2 ユニタリー変換

求めたい有効ハミルトニアンは、電子電子相互作用である。つまり、電子散乱やフォノンによる電気抵抗等は考えたくない。かと言って、通常の手順で摂動論を行うと、電子電子相互作用は二次の相互作用なので、必ず電子散乱等が考慮されてしまう。そこで、ハミルトニアンをユニタリー変換することを考える。ユニタリー変換はノルムを不変に保つ変換であり、ハミルトニアンの固有値は変化しない。

次のようなハミルトニアンを考える:

$$\bar{H} = e^{-S} H e^S = H + [H, S] + \frac{1}{2} [[H, S], S] + \dots \quad (15)$$

³ ϵ が \exp の肩にあるので無限の過去で遷移確率はゼロになる。

⁴ ここでは終状態であることを強調するため $m \rightarrow f$ と表記した。

⁵ Kittel の本に合わせて書いた。

S は任意のユニタリー演算子である。このハミルトニアン \bar{H} は

$$\bar{H} = H_0 + \lambda H_{\text{ep}} + [H_0, S] + [\lambda H_{\text{ep}}, S] + \frac{1}{2}[[H_0, S], S] + \dots \quad (16)$$

と書ける。電子散乱等を考えたくないので、 λ の一次の項が消えるような有効ハミルトニアンになるのが望ましい。 S が λ の何次であるかは現時点ではわからない。しかし、 S が λ の何次であれ、 H_{ep} の項は 1 次であるから、とりあえず λH_{ep} が消えてくれればよい。つまり、もっとも単純には

$$\lambda H_{\text{ep}} + [H_0, S] = 0 \quad (17)$$

が成り立つ S であると都合がよい。このとき、 S の表式を求めてみる。 Schrodinger 描像において H_{ep} も S も時間に依存しないと仮定する。このとき、 S の相互作用描像 S_I は

$$S_I = e^{iH_0 t} S e^{-iH_0 t} \quad (18)$$

であり、両辺を t で微分すれば運動方程式

$$i \frac{dS_I}{dt} = [S_I, H_0] \quad (19)$$

が成り立つ。ここで、式 (17) の両辺に、左側から $e^{iH_0 t}$ 右側から $e^{-iH_0 t}$ をかけて相互作用表示すると

$$\lambda H_{\text{ep}}^I + [H_0, S_I] = 0 \quad (20)$$

となるので、式 (19) に代入すると

$$i \frac{dS_I}{dt} = \lambda H_{\text{ep}}^I \quad (21)$$

となる。これを解くと

$$S_I(t) = -i\lambda \int_{-\infty}^t H_{\text{ep}}^I(t') e^{\epsilon t'} dt' \quad (22)$$

となる⁶。また、式 (16) に式 (17) を代入すると

$$\bar{H} = H_0 + \lambda H_{\text{ep}} + [H_0, S] + [\lambda H_{\text{ep}}, S] + \frac{1}{2}[-\lambda H_{\text{ep}}, S] + \dots \quad (23)$$

$$= H_0 + \frac{1}{2}[\lambda H_{\text{ep}}, S] + \dots \quad (24)$$

となり、さらに式 (22) を代入すると

$$\bar{H} = H_0 + \frac{i}{2}\lambda^2 \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} [H_{\text{ep}}^I(t'), H_{\text{ep}}^I(0)] + \dots \quad (25)$$

というハミルトニアンが得られる。第三項以降は λ の三次以上であるので、無視すると

$$\bar{H} \sim H_0 + \frac{i}{2}\lambda^2 \int_{-\infty}^0 dt' e^{\epsilon t'} [H_{\text{ep}}^I(t'), H_{\text{ep}}^I(0)] \quad (26)$$

が得られる。

2.3 S の行列要素

この節では

$$\langle n|S|m\rangle = \frac{\langle n|H_{\text{ep}}|m\rangle}{E_m - E_n} \quad (27)$$

を示す。 $|n\rangle$ 、 $|m\rangle$ はそれぞれ H_0 の固有状態である (H_0 が対角化されている)。

⁶無限の過去には相互作用が無いとした。

S の相互作用表示 I を用いれば

$$\langle n|S_I|m\rangle = \langle n|e^{iH_0t} S e^{-iH_0t}|m\rangle \quad (28)$$

$$= \langle n|e^{iE_n t} S e^{-iE_m t}|m\rangle \quad (29)$$

である。また、式 (22) を用いれば

$$\langle n|S_I|m\rangle = -i\lambda \langle n|\int_{-\infty}^t e^{\epsilon t'} H_{\text{ep}}^I(t') dt'|m\rangle \quad (30)$$

$$= -i\lambda \langle n|\int_{-\infty}^t e^{\epsilon t'} e^{iH_0 t'} H_{\text{ep}} e^{-iH_0 t'} dt'|m\rangle \quad (31)$$

$$= -i\lambda \langle n|\int_{-\infty}^t e^{\epsilon t'} e^{iE_n t'} H_{\text{ep}} e^{-iE_m t'} dt'|m\rangle \quad (32)$$

$$= \lambda \frac{\langle n|H_{\text{ep}}|m\rangle}{(E_m - E_n + i\epsilon)} e^{\epsilon t} e^{i(E_n - E_m)t} \quad (33)$$

となり、 $\epsilon \rightarrow 0$ として式 (29) と比較すれば、式 (27) が成り立つことを示せる。

2.4 有効ハミルトニアン の導出

さて、準備が整ったので、フォノンを媒介とした電子電子相互作用の有効ハミルトニアンを導くことにしよう。まず、電子電子相互作用の前後でフォノンの占有数が変わらないとする（前述のように二次摂動なのでフォノンの数は変化しない）。このとき、電子-フォノン系の始状態、中間状態、終状態はそれぞれ

- $|i\rangle = |\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0\rangle$ 、 $E_i = E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'}$
- $|p_1\rangle = |\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}'; 1\rangle$ 、 $E_{p_1} = E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + E_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{q}}$
- $|f\rangle = |\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}' + \mathbf{q}; 0\rangle$ 、 $E_f = E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + E_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}$

あるいは

- $|i\rangle = |\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0\rangle$ 、 $E_i = E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'}$
- $|p_2\rangle = |\mathbf{k}, \mathbf{k}' + \mathbf{q}; 1\rangle$ 、 $E_{p_2} = E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} + \omega_{-\mathbf{q}}$
- $|f\rangle = |\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}' + \mathbf{q}; 0\rangle$ 、 $E_f = E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + E_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}$

である。

$$\bar{H} = H_0 + \frac{1}{2}[\lambda H_{\text{ep}}, S] \equiv H_0 + H_{\text{ind}} \quad (34)$$

とすると、

$$\langle f|H_{\text{ind}}|i\rangle = \frac{\lambda}{2} \langle f|H_{\text{ep}}S - SH_{\text{ep}}|i\rangle \quad (35)$$

$$= \frac{\lambda}{2} \sum_{\alpha} (\langle f|H_{\text{ep}}|\alpha\rangle \langle \alpha|S|i\rangle - \langle f|S|\alpha\rangle \langle \alpha|H_{\text{ep}}|i\rangle) \quad (36)$$

となる。ここで、 $\sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1$ を用いた。 $|\alpha\rangle$ にはさまざまな状態があるが、行列要素がゼロにならないという要請と中間状態を $|p_{1,2}\rangle$ に限定していることから、

$$\langle f|H_{\text{ind}}|i\rangle = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1,2} (\langle f|H_{\text{ep}}|p_j\rangle \langle p_j|S|i\rangle - \langle f|S|p_j\rangle \langle p_j|H_{\text{ep}}|i\rangle) \quad (37)$$

となり、式 (27) を用いると

$$\langle f|H_{\text{ind}}|i\rangle = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1,2} \left(\langle f|H_{\text{ep}}|p_j\rangle \langle p_j|H_{\text{ep}}|i\rangle \left(\frac{1}{E_i - E_{p_j}} + \frac{1}{E_f - E_{p_j}} \right) \right) \quad (38)$$

となる。

計算は煩雑だが、一つ一つ計算を追っていくことにする。ゼロになる行列要素は逐次落としていき計算を整理する。

$\langle p_1|H_{\text{ep}}|i\rangle$ は $|k, k'; 0\rangle$ から $|k - q, k'; 1\rangle$ への遷移であるから

$$\langle p_1|H_{\text{ep}}|i\rangle = \langle p_1| \left(i \sum_{k'', q''} D_{\mathbf{q}} (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |i\rangle \quad (39)$$

$$= \langle p_1| \left(i \sum_{k'', q''} D_{\mathbf{q}} (-a_{-\mathbf{q}}^\dagger) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |i\rangle \quad (40)$$

であり、 $k'' = k$ 、 $q'' = -q$ のときのみこの行列要素が値を持つので

$$\langle p_1|H_{\text{ep}}|i\rangle = \langle p_1| \left(i D_{-\mathbf{q}} (-a_{-\mathbf{q}}^\dagger) c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |i\rangle \quad (41)$$

となる。 $\langle f|H_{\text{ep}}|p_1\rangle$ は $|k - q, k'; 1\rangle$ から $|k - q, k' + q; 0\rangle$ への遷移であるから

$$\langle f|H_{\text{ep}}|p_1\rangle = \langle f| \left(i \sum_{k'', q''} D_{\mathbf{q}} (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |p_1\rangle \quad (42)$$

$$= \langle f| \left(i \sum_{k'', q''} D_{\mathbf{q}} (a_{\mathbf{q}}) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |p_1\rangle \quad (43)$$

$$= \langle f| \left(i D_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} \right) |p_1\rangle \quad (44)$$

と書ける。よって、 $\langle f|H_{\text{ep}}|p_1\rangle \langle p_1|H_{\text{ep}}|i\rangle$ は

$$\langle f|H_{\text{ep}}|p_1\rangle \langle p_1|H_{\text{ep}}|i\rangle = \langle f| \left(i D_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} \right) |p_1\rangle \langle p_1| \left(i D_{-\mathbf{q}} (-a_{-\mathbf{q}}^\dagger) c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |i\rangle \quad (45)$$

$$= \langle f| \left(D_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} \right) |p_1\rangle \langle p_1| \left(D_{-\mathbf{q}} a_{-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |i\rangle \quad (46)$$

$$= D_{\mathbf{q}} D_{-\mathbf{q}} \quad (47)$$

となる。同様に、 $\langle p_2|H_{\text{ep}}|i\rangle$ は $|k, k'; 0\rangle$ から $|k, k' + q; 1\rangle$ への遷移であるから

$$\langle p_2|H_{\text{ep}}|i\rangle = \langle p_2| \left(i \sum_{k'', q''} D_{\mathbf{q}} (a_{\mathbf{q}} - a_{-\mathbf{q}}^\dagger) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |i\rangle \quad (48)$$

$$= \langle p_2| \left(i \sum_{k'', q''} D_{\mathbf{q}} (-a_{-\mathbf{q}}^\dagger) c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |i\rangle \quad (49)$$

$$= \langle p_2| \left(i D_{\mathbf{q}} (-a_{-\mathbf{q}}^\dagger) c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} \right) |i\rangle \quad (50)$$

となり、 $\langle f|H_{\text{ep}}|p_2\rangle$ は $|k, k' + q; 1\rangle$ から $|k - q, k' + q; 0\rangle$ への遷移であるから

$$\langle f|H_{\text{ep}}|p_2\rangle = \langle f| \left(i \sum_{k'', q''} D_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |p_2\rangle \quad (51)$$

$$= \langle f| \left(i D_{-\mathbf{q}} a_{-\mathbf{q}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |p_2\rangle \quad (52)$$

となる。よって、 $\langle f|H_{\text{ep}}|p_2\rangle\langle p_2|H_{\text{ep}}|i\rangle$ は

$$\langle f|H_{\text{ep}}|p_2\rangle\langle p_2|H_{\text{ep}}|i\rangle = \langle f| \left(iD_{-\mathbf{q}}a_{-\mathbf{q}}c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |p_2\rangle\langle p_2| \left(iD_{\mathbf{q}}(-a_{-\mathbf{q}}^\dagger)c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} \right) |i\rangle \quad (53)$$

$$= \langle f| \left(D_{-\mathbf{q}}a_{-\mathbf{q}}c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} \right) |p_2\rangle\langle p_2| \left(D_{\mathbf{q}}a_{-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} \right) |i\rangle \quad (54)$$

$$= D_{\mathbf{q}}D_{-\mathbf{q}} \quad (55)$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} \langle f|H_{\text{ind}}|i\rangle &= D_{\mathbf{q}}D_{-\mathbf{q}} \left(\frac{1}{E_{\mathbf{k}} - (E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} - (E_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{q}})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E_{\mathbf{k}'} - (E_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} + \omega_{-\mathbf{q}})} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - (E_{\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{q}})} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

となる。始状態が $|\mathbf{k}, \mathbf{k}'; 0\rangle$ 、終状態が $|\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{k}' + \mathbf{q}; 0\rangle$ であるのはどの項も変わらないので、第二量子化表示を行うと⁷、

$$\begin{aligned} H_{\text{ind}} &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} D_{\mathbf{q}} D_{-\mathbf{q}} \left(\frac{1}{E_{\mathbf{k}} - (E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} - (E_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{q}})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E_{\mathbf{k}'} - (E_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} + \omega_{-\mathbf{q}})} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - (E_{\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{q}})} \right) \end{aligned} \quad (57)$$

となり、 $D_{\mathbf{q}} = D$ 、 $\omega_{\mathbf{q}} = \omega_{-\mathbf{q}}$ と仮定すれば、

$$\begin{aligned} H_{\text{ind}} &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} D^2 \left(\frac{1}{E_{\mathbf{k}} - (E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - (E_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}})} \right) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} D^2 \left(\frac{1}{E_{\mathbf{k}'} - (E_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}} - (E_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{q}})} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} D^2 \left(\frac{-2\omega_{\mathbf{q}}}{-(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})^2 + \omega_{\mathbf{q}}^2} \right) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} D^2 \left(\frac{-2\omega_{\mathbf{q}}}{-(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})^2 + \omega_{\mathbf{q}}^2} \right) \end{aligned} \quad (59)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} c_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^\dagger c_{\mathbf{k}} D^2 \left(\frac{4\omega_{\mathbf{q}}}{(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})^2 - \omega_{\mathbf{q}}^2} \right) \quad (60)$$

という有効ハミルトニアンが得られる。

この電子電子相互作用は $|E_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}}| < \omega_{\mathbf{q}}$ で引力相互作用である。つまり、 $\omega_{\mathbf{q}} \sim \omega_{\text{D}}$ を仮定すると、フェルミエネルギーを中心としたオーダー ω_{D} のエネルギー殻でこの相互作用は引力となることがわかる。

参考文献

Kittel, 「Quantum Theory of Solids」

A. M. ザコスキン, 「多体系の量子論 <技法と応用>」(Springer)

G. グロツソ, G. P. パラビチニ, 安食 博志, 「固体物理学」 (吉岡書店)

⁷第二量子化の手続きを思い出して、行列要素から電子の生成消滅演算子によるハミルトニアンを構成しなせばよい。