# 準古典遅延Green関数を用いた状態密度の表式の導出

永井佑紀

平成18年10月17日

準古典遅延Green関数を用いて状態密度 $N_s(\varepsilon)$ を導出するとき、$\varepsilon < 0$ の領域まで正しい表式を得るには温度Green関数の解析接続を注意深く行わなければならない。ここでは、一様系における準古典Green関数を用いて状態密度が負にならないことを示す。

## 1 状態密度

### 1.1 一様系における準古典温度Green関数

状態密度 $N_s(\varepsilon)$ は、

$$N_s(\varepsilon) = -\langle \mathrm{Re}\, g^{\mathrm{R}} \rangle \tag{1}$$

と書ける。ここで $\langle \cdots \rangle$ はフェルミ面での平均と、空間平均を表す。一様系における準古典Green関数は

$$g(\hat{\mathbf{p}}, i\omega_n) = -\frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \tag{2}$$

とである。ここで、$\omega_n$ を複素数 $z$ に拡張し、ある解析関数：

$$g(\hat{\mathbf{p}}, z) = -\frac{-iz}{\sqrt{-z^2 + |\Delta|^2}} \tag{3}$$

を用意すると、温度Green関数はこの解析関数の虚軸の領域となり、遅延Green関数は

$$\begin{aligned} g^{\mathrm{R}} &= \lim_{\delta \to +0} g(\hat{\mathbf{p}}, z \to \varepsilon + i\delta) &(4)\\ &= -\frac{-i\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon^2 + |\Delta|^2}} &(5)\end{aligned}$$

となる（図.1)。さて、ここで解析関数の分母に着目する。

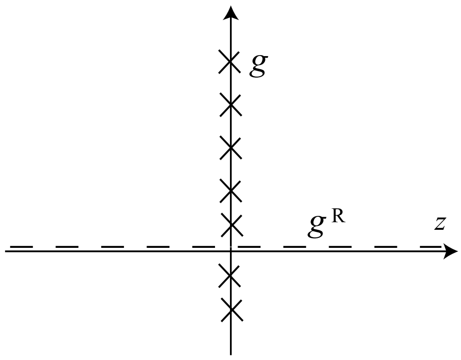


図 1: 複素平面における温度Green関数 $g$ と遅延Green関数 $g^{\mathrm{R}}$ との関係。

$$z-|\Delta| \quad = \quad |z-|\Delta||e^{i\theta_1} \tag{6}$$

$$z+|\Delta| \quad = \quad |z+|\Delta||e^{i\theta_2} \tag{7}$$

と置いて分母を書き直すと

$$\frac{1}{\sqrt{-z^2+|\Delta|^2}} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{(-z+|\Delta|)(z+|\Delta|)}} \tag{8}$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{(z-|\Delta|)e^{-i\pi}(z+|\Delta|)}} \tag{9}$$

$$= \quad \frac{1}{|z+|\Delta||^{1/2}|z-|\Delta||^{1/2}}e^{-i(\theta_1+\theta_2-\pi)/2} \tag{10}$$

となる。ここで $z=i\infty$ のとき、この関数は温度 Green 関数の分母と等しくなる。温度 Green 関数の分母は正の実数であるという条件は、$\theta_1=\theta_2=\pi/2$ であれば満たすことができる。

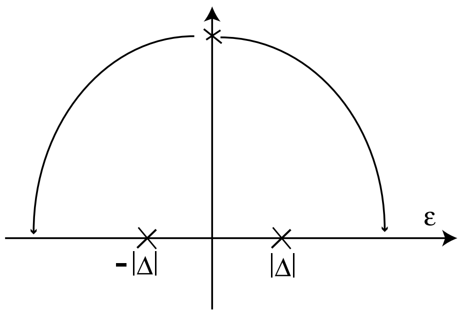


図 2: 温度 Green 関数を遅延 Green 関数へと変換する際の複素平面上での経路。$\varepsilon$ の正負によって $\mathrm{Re}\, g^{\mathrm{R}}$ の偏角が異なる。

次に、温度 Green 関数（$z=i\infty$）から遅延 Green 関数（$z=\varepsilon+i\delta$）への変換を行う。このとき、複素平面上では図.2 のような経路をとる。$\varepsilon$ の正負によって経路が異なることに注意しなければならない。

### 1.2 $\varepsilon>0$ のとき

右回りの経路では、$\theta_1=\theta_2=0$ であるので、

$$\frac{1}{\sqrt{-z^2+|\Delta|^2}} \quad = \quad \frac{1}{|z+|\Delta||^{1/2}|z-|\Delta||^{1/2}}e^{-i(\theta_1+\theta_2-\pi)/2} \tag{11}$$

$$\rightarrow \quad \frac{i}{|\varepsilon+|\Delta||^{1/2}|\varepsilon-|\Delta||^{1/2}} \tag{12}$$

となる。よって、遅延 Green 関数は

$$g^{\mathrm{R}} \quad = \quad \frac{-i\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon^2+|\Delta|^2}} \tag{13}$$

$$= \quad -\frac{\varepsilon}{|\varepsilon+|\Delta||^{1/2}|\varepsilon-|\Delta||^{1/2}} \tag{14}$$

となる。

### 1.3 $\varepsilon < 0$ のとき

左回りの経路では、$\theta_1 = \theta_2 = \pi$ であるので、

$$\frac{1}{\sqrt{-z^2 + |\Delta|^2}} = \frac{1}{|z + |\Delta||^{1/2}|z - |\Delta||^{1/2}} e^{-i(\theta_1 + \theta_2 - \pi)/2} \tag{15}$$

$$\to \frac{-i}{|\varepsilon + |\Delta||^{1/2}|\varepsilon - |\Delta||^{1/2}} \tag{16}$$

となる。よって、遅延 Green 関数は

$$g^{\mathrm{R}} = \frac{-i\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon^2 + |\Delta|^2}} \tag{17}$$

$$= -\frac{-\varepsilon}{|\varepsilon + |\Delta||^{1/2}|\varepsilon - |\Delta||^{1/2}} \tag{18}$$

となる。

### 1.4 状態密度

以上から、$\varepsilon$ の正負によらず

$$g^{\mathrm{R}} = \frac{-i\varepsilon}{\sqrt{-\varepsilon^2 + |\Delta|^2}} \tag{19}$$

$$= -\frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon + |\Delta||^{1/2}|\varepsilon - |\Delta||^{1/2}} \tag{20}$$

という表式を用いることができて、状態密度は

$$N_s(\varepsilon) = \langle \frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon + |\Delta||^{1/2}|\varepsilon - |\Delta||^{1/2}} \rangle \tag{21}$$

と書くことができる。この表式はペアリングの対称性に依らず状態密度が $\varepsilon$ に関して偶関数であることを示している。

このノートの結論は、Green 関数を用いればホール的励起も含めて状態密度が自然な形で導出されるということである。温度 Green 関数から遅延 Green 関数に移るさいに、複素平面上の経路をきちんと考えなければ正しい遅延 Green 関数を得ることができないことに注意しなければならない。

## 参考文献


Richard D. Mattuck. ”A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem” 2nd (Dover)

Nikolai Kopnin.”Theory of Nonequilibrium Superconductivity” (Oxford Science Publications)

A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I.E. Dzyaloshinski ”Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics” (Dover)

M. Sigrist and K. Ueda: Rev. Mod. Phys. **63** 239 (1991).