古典的プラズマ振動について

永井佑紀

平成 17 年 5 月 22 日

プラズマ振動数を古典的に求める。

系について

一次元の電子ガスの系を考える。一様な電子密度を n_0 として、ある点において δn だけゆらいだとする。このとき、電子密度 n は $n = n_0 + \delta n$ と書ける。また、電子の正味の速度を $\bar{v}$ とすると、系は

$$m\dot{\bar{v}} = eE \tag{1}$$

という運動方程式を満たす。ここで、E は電子密度の偏りによって生じた電場である。また、δn は n_0 に比べて十分小さく、速度 $\bar{v}$ も大きくないとする。

連続の式

連続の式は

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{j} &= -\frac{\partial n}{\partial t} \qquad (2) \\ n_0\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial x}\delta n + \delta n\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} &= -\frac{\partial \delta n}{\partial t} \qquad (3) \end{aligned}$$

となる。ここで、δn の空間依存性を無視できるとすると（δn が n_0 に比べて小さいので）、

$$n_0\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \delta n}{\partial t} \tag{4}$$

という式が得られる。

ポアソン方程式

電子密度の揺らぎによって生じた電場は、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi = -4\pi e\delta n \tag{5}$$

というポアソン方程式を満たす ϕ によって決定される。ここで、電場は

$$E = -\frac{\partial}{\partial x}\phi \tag{6}$$

を満たす。

プラズマ振動数の導出

式 (1) の両辺を x で偏微分すると、

$$m\frac{\partial}{\partial x}\dot{v} = e\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e^2 \delta n \tag{7}$$

となる。ここで、式 (5) を用いた。また、左辺に式 (4) を用いると δn の方程式

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} = -\frac{4\pi n_0 e^2}{m}\delta n \tag{8}$$

が得られる。この方程式の解は、積分定数を A、B として、

$$\delta n(t) = A\mathrm{e}^{i\omega_q t} + B\mathrm{e}^{-i\omega_q t} \tag{9}$$

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m}} \tag{10}$$

となり、ω_q がプラズマ振動数となる。