5.3 異方的な系の相関関数

チェイキン＆ルベンスキー「現代の凝縮系物理学」（吉岡書店）の章末問題

永井佑紀

平成 17 年 8 月 17 日

ある異方的な系の相関関数が次の斉次方程式を満たすものと仮定する。

$$G(x_\parallel, x_\perp, t) = b^{-(d-2+\eta)} G(b^{-(1+\mu_\parallel)} x_\parallel, b^{-1} x_\perp, b^{1/\nu} t) \tag{1}$$

ただし、$t = (T - T_c)/T_c$ である。次の各量のふるまいを決める臨界指数を η、$\mu_\parallel$、ν を用いて求めよ。

1. $G(x_\parallel, x_\perp = 0, t = 0)$
2. $G(x_\parallel = 0, x_\perp, t = 0)$
3. 相関距離 $\xi_\parallel$ および $\xi_\perp$
4. $t < 0$ に対する感受率と秩序パラメータ

1. $G(x_\parallel, x_\perp = 0, t = 0)$

$x_\perp = 0$、$t = 0$、$b = |x_\parallel|^{1/(1+\mu_\parallel)}$ とおいて斉次方程式に代入すると

$$G(x_\parallel, x_\perp = 0, t = 0) = |x_\parallel|^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_\parallel)} G(1, 0, 0) \tag{2}$$

となる。よって、臨界指数は $-(d-2+\eta)/(1+\mu_\parallel)$ である。

2. $G(x_\parallel = 0, x_\perp, t = 0)$

$x_\parallel = 0$、$t = 0$、$b = |x_\perp|$ とおいて斉次方程式に代入すると

$$G(x_\parallel = 0, x_\perp, t = 0) = |x_\perp|^{-(d-2+\eta)} G(0, 1, 0) \tag{3}$$

となる。よって、臨界指数は $-(d-2+\eta)$ である。

3. 相関距離 $\xi_\parallel$ および $\xi_\perp$

$\xi_\parallel$ の臨界指数

$x_\perp = 0$、$b = |x_\parallel|^{1/(1+\mu_\parallel)}$ とおいて斉次方程式に代入すると

$$\begin{aligned} G(x_\parallel, x_\perp = 0, t) &= |x_\parallel|^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_\parallel)} G(1, 0, |x_\parallel|^{1/(\nu(1+\mu_\parallel))} t) &(4) \\ &= |x_\parallel|^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_\parallel)} G\left(1, 0, \frac{|x_\parallel|^{1/(\nu(1+\mu_\parallel))}}{t^{-1}}\right) &(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |x_{\parallel}|^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_{\parallel})}G\left(1,0,\left[\frac{|x_{\parallel}|}{t^{-(\nu(1+\mu_{\parallel}))}}\right]^{1/(\nu(1+\mu_{\parallel}))}\right) &(6)\\ &= |x_{\parallel}|^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_{\parallel})}Y\left(\frac{|x_{\parallel}|}{t^{-(\nu(1+\mu_{\parallel}))}}\right) = |x_{\parallel}|^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_{\parallel})}Y\left(\frac{|x_{\parallel}|}{\xi_{\parallel}}\right) &(7)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\xi_{\parallel} \sim t^{-\nu(1+\mu_{\parallel})} \tag{8}$$

となり、臨界指数は $-\nu(1+\mu_{\parallel})$ となる。

$\xi_{\perp}$ の臨界指数

$x_{\parallel}=0$、$b=|x_{\perp}|$ とおいて斉次方程式に代入すると

$$\begin{aligned} G(x_{\parallel}=0,x_{\perp},t) &= |x_{\perp}|^{-(d-2+\eta)}G(0,1,|x_{\perp}|^{1/\nu}t) &(9)\\ &= |x_{\perp}|^{-(d-2+\eta)}G\left(0,1,\frac{|x_{\perp}|^{1/\nu}}{t^{-1}}\right) &(10)\\ &= |x_{\perp}|^{-(d-2+\eta)}G\left(0,1,\left[\frac{|x_{\perp}|}{t^{-\nu}}\right]^{1/\nu}\right) &(11)\\ &= |x_{\perp}|^{-(d-2+\eta)}Y\left(\frac{|x_{\perp}|}{t^{-\nu}}\right) = |x_{\perp}|^{-(d-2+\eta)}Y\left(\frac{|x_{\perp}|}{\xi_{\perp}}\right) &(12)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\xi_{\perp} \sim t^{-\nu} \tag{13}$$

となり、臨界指数は $-\nu$ となる。

$t<0$ に対する感受率と秩序パラメータ

感受率 χ は $T^{-1}G(|x|)$ を x について積分したものである。

$x_{\parallel}$ に対する感受率 $\chi_{\parallel}$

$$\chi_{\parallel} = T^{-1}\int d^d x_{\parallel}|x_{\parallel}|^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_{\parallel})}Y\left(\frac{|x_{\parallel}|}{\xi_{\parallel}}\right) \tag{14}$$

となり、ここで $y_{\parallel}=\frac{|x_{\parallel}|}{\xi_{\parallel}}$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} \chi_{\parallel} &= T^{-1}\int d^d y_{\parallel}\xi_{\parallel}^d\xi_{\parallel}^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_{\parallel})}|y_{\parallel}|^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_{\parallel})}Y\left(y_{\parallel}\right) &(15)\\ &= T^{-1}\xi_{\parallel}^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_{\parallel})+d}\int d^d y_{\parallel}|y_{\parallel}|^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_{\parallel})}Y\left(y_{\parallel}\right) &(16)\\ &\sim \xi_{\parallel}^{-(d-2+\eta)/(1+\mu_{\parallel})+d} &(17)\end{aligned}$$

となる。よって、臨界指数は $-(d-2+\eta)/(1+\mu_{\parallel})+d$ となる。

$x_\perp$ に対する感受率 $\chi_\perp$

$$\chi_\perp = T^{-1}\int d^d x_\perp |x_\perp|^{-(d-2+\eta)} Y\left(\frac{|x_\perp|}{\xi_\perp}\right) \tag{18}$$

となり、ここで $y_\perp = \frac{|x_\perp|}{\xi_\perp}$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} \chi_\perp &= T^{-1}\int d^d y_\perp \xi_\perp^d \xi_\perp^{-(d-2+\eta)} |y_\perp|^{-(d-2+\eta)} Y(y_\perp) && (19)\\ &= T^{-1}\xi_\perp^{-(d-2+\eta)+d}\int d^d y_\perp |y_\perp|^{-(d-2+\eta)} Y(y_\perp) && (20)\\ &\sim \xi_\perp^{-(-2+\eta)} && (21) \end{aligned}$$

となる。よって、臨界指数は $-(-2+\eta)$ となる。

秩序パラメータ

$$\bar{G}(|x_\parallel|, |x_\perp|) = G(|x_\parallel|, |x_\perp|) + <\phi(x_\parallel, x_\perp)><\phi(0,0)> \tag{22}$$

という量を導入する。この量は転移温度以上では $G(|x_\parallel|, |x_\perp|)$ と一致する。したがって転移点近傍において、$\bar{G}(|x_\parallel|, |x_\perp|)$ も $G(|x_\parallel|, |x_\perp|)$ と同様に斉次性

$$\bar{G}(x_\parallel, x_\perp, t) = b^{-(d-2+\eta)}\bar{G}(b^{-(1+\mu_\parallel)}x_\parallel, b^{-1}x_\perp, b^{1/\nu}t) \tag{23}$$

を満たす。$t<0$ において、$b = |t|^{-\nu}$ とおくと

$$\begin{aligned} \bar{G}(x_\parallel, x_\perp, t) &= |t|^{\nu(d-2+\eta)}\bar{G}(|t|^{\nu(1+\mu_\parallel)}x_\parallel, |t|^\nu x_\perp, t/|t|) && (24)\\ &= (-t)^{\nu(d-2+\eta)}\bar{G}((-t)^{\nu(1+\mu_\parallel)}x_\parallel, (-t)^\nu x_\perp, -1) && (25) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\lim_{|x_\parallel|,|x_\perp|\to\infty}\bar{G}(x_\parallel, x_\perp, t) = <\phi(x_\parallel, x_\perp)><\phi(0,0)> \sim (-t)^{2\beta} \tag{26}$$

であるから、

$$\lim_{|x_\parallel|,|x_\perp|\to\infty}\bar{G}(x_\parallel, x_\perp, t) = (-t)^{\nu(d-2+\eta)}\lim_{|x_\parallel|,|x_\perp|\to\infty}\bar{G}((-t)^{\nu(1+\mu_\parallel)}x_\parallel, (-t)^\nu x_\perp, -1) \sim (-t)^{\nu(d-2+\eta)} \tag{27}$$

である。よって、上の二式を比べることで、臨界指数が $\beta = \frac{1}{2}(d-2+\eta)$ であることがわかる。