

4.2 外場中の反強磁性体の三重臨界点

チェイキン&ルベンスキー「現代の凝縮系物理学」(吉岡書店)の章末問題

永井佑紀

平成 17 年 8 月 17 日

問題

(外場中の反強磁性体の 3 重臨界点) 反強磁性体中の外部磁場 h は秩序パラメータ m_s (互い違いの磁化) とではなく、磁化 m と結合している。 m_s と m の間の相互作用は現象論的に次のような自由エネルギーで記述されるものと仮定する:

$$f = \frac{1}{2}rm_s^2 + um_s^4 + \frac{1}{2}r_m m^2 - hm + \frac{1}{2}wm_s^2 m^2 \quad (1)$$

ただし、 $r = a(T - T^*)$ 、 $w > 0$ で、 r_m は温度によらないとする。このモデルが、次の T_t 、および h_t に 3 重臨界点をもつことを証明せよ。

$$T_t = T^* - \frac{2ur_m}{aw} \quad (2)$$

$$h_t^2 = \frac{2ur_m^3}{w^2} \quad (3)$$

また、平均場近似の相図は図 4.6.4 に示したものと似ていることを示せ。ただし、 $h < h_t$ に対する 2 次転移点は

$$T_c = T_t - \frac{wh^2}{ar_m^2} \eta \quad (4)$$

であり、 $h > h_t$ で $|h - h_t|$ が小さいときの 1 次転移点は

$$T_c = T_t - \frac{wh^2}{ar_m^2} \left[\eta - \frac{1}{4}\eta^2 \right] \quad (5)$$

である。ここで、 $\eta = 1 - (h_t^2/h^2)$ である。

解答

まず、 m_s の最高次の項は、安定性を保つために正である必要がある。したがって、

$$u > 0 \quad (6)$$

である。また、 m の最高次の項 $(r_m + wm_s^2)m^2/2$ は、 m_s が小さい値のとき自由エネルギーがどこまでも低くなることを妨げるために $r_m > 0$ でなければならない。自由エネルギーは m_s 、 m に対して最小値をとるので

$$\frac{\partial f}{\partial m_s} = rm_s + 4um_s^3 + wm_s^2 m^2 = m_s(r + 4um_s^2 + wm^2) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = r_m m - h + wm_s^2 m = 0 \quad (8)$$

$$(9)$$

であり、安定性の条件は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m_s^2} = r + 12um_s^2 + wm^2 > 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} = r_m + wm_s^2 > 0 \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial m_s^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial m^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial m_s \partial m}\right)^2 = (r + 12um_s^2 + wm^2)(r_m + wm_s^2) - 4w^2m^2m_s^2 > 0 \quad (12)$$

である。これらを満たす解 $\Phi = (m_s, m)$ は四通りある。

a. $\Phi_a = (0, 0)$

式 (8) より、 $h = 0$ のときのみこの解は存在する。安定性の条件に当てはめると

$$r > 0 \quad (13)$$

$$r_m > 0 \quad (14)$$

$$rr_m > 0 \quad (15)$$

である。

b. $\Phi_b = (m_s, 0)$

式 (8) より、 $h = 0$ のときのみこの解は存在する。このとき解は

$$m_s^2 = -\frac{r}{4u} \quad r < 0 \quad (16)$$

となる。安定性の条件に当てはめると

$$-2r > 0 \quad (17)$$

$$r_m > \frac{w}{4u}r \quad (18)$$

$$-2r(r_m - wr/4u) > 0 \quad (19)$$

となる。したがって、 $h = 0$ のときは必ず $m = 0$ となり $r > 0$ のとき $m_s = 0$ 、 $r < 0$ のとき $m_s \neq 0$ である。

c. $\Phi_c = (0, m)$

式 (8) より、

$$mr_m = h \quad (20)$$

となり、 $h = 0$ のときには解は存在しない。 $h \neq 0$ のとき解は

$$m = \frac{h}{r_m} \quad (21)$$

となる。安定性の条件に当てはめると

$$r > -\frac{h^2}{r_m^2}w \quad (22)$$

$$r_m > 0 \quad (23)$$

$$(r + h^2w/r_m^2)r_m > 0 \quad (24)$$

となる。

d. $\Phi_d = (m_s, m)$

式 (8) より、 $h = 0$ では

$$r_m + wm_s^2 = 0 \quad (25)$$

が成り立つ必要があるが、これは $r_m > 0$ において解が存在しない。よって、 $h \neq 0$ にのみ解が存在する。式 (8) を変形して

$$m = \frac{h}{r_m + wm_s^2} \quad (26)$$

とおき、式 (7) に代入すると、

$$r(r_m^2 + wm_s^2)^2 + 4um_s^2(r_m + wm_s^2)^2 + h^2w = 0 \quad (27)$$

$$rr_m^2 + 2rr_mwm_s^2 + rw^2m_s^4 + 4ur_m^2m_s^2 + 8uwm_s^4 + 4uw^2m_s^6 + h^2w = 0 \quad (28)$$

$$4uw^2M_s^3 + (rw^2 + 8ur_mw)M_s^2 + 2(rr_mw + 2ur_m^2)M_s + rr_m^2 = -h^2w \quad (29)$$

となる。ここで $M_s = m_s^2$ とおいた。この M_s に関する三次方程式の解が自由エネルギーの極小値を与える。まず、

$$F(M_s) = 4uw^2M_s^3 + (rw^2 + 8ur_mw)M_s^2 + 2(rr_mw + 2ur_m^2)M_s + rr_m^2 \quad (30)$$

とおく。この関数と $-h^2$ との交点が自由エネルギーの極値を与える。したがって、関数 $F(M_s)$ の振る舞いを見る必要がある。関数 $F(M_s)$ 自身の極値は

$$\frac{\partial F}{\partial M_s} = 12uw^2M_s^2 + 2(rw^2 + 8ur_mw)M_s + 2(rr_mw + 2ur_m^2) = 0 \quad (31)$$

を解くことで得られる。極値のうち、値の大きい方を M_{sL} 、小さい方を M_{sS} とすると

$$M_{sS} = -\frac{r_m}{w}, \quad M_{sL} = -\left(\frac{r}{6u} + \frac{r_m}{3w}\right), \quad r < \frac{4ur_m}{w} \quad (32)$$

$$M_{sS} = -\left(\frac{r}{6u} + \frac{r_m}{3w}\right), \quad M_{sL} = -\frac{r_m}{w}, \quad r > \frac{4ur_m}{w} \quad (33)$$

となる。ここで、安定性の条件である式 (10) から $r < 0$ であることがわかり、極値は

$$M_{sS} = -\frac{r_m}{w}, \quad M_{sL} = -\left(\frac{r}{6u} + \frac{r_m}{3w}\right), \quad r < 0 \quad (34)$$

となる。 $r_m > 0$ であるから M_{sS} は常に $M_s < 0$ の領域にあり、 $F(M_s)$ のとりうる値は

$$M_s > 0 \quad (35)$$

である。 $F(M_s)$ の三次の項 $4uw^2$ は常に正なので、 M_{sL} が極小値である。

二次相転移

$M_{sL} < 0$ 、つまり $r > -\frac{2ur_m}{w}$ のとき、関数 $F(M_s)$ は $M_s > 0$ で単調増加関数である。自由エネルギー極小の条件式 (7) より、 f は $M_s = 0$ と $M_s \neq 0$ の二つに極小値を持つ。また、式 (29) の右辺の変域は

$$0 > -h^2w \quad (36)$$

であるから、 $F(M_s) < 0$ であり $F(0)$ のとき最小値をとる。つまり、

$$r \geq -\frac{h^2}{r_m^2}w \quad (37)$$

のときには自由エネルギーは $M_s = 0$ 以外の極小値を持たない。したがって、連続的に解は $M_s = 0$ へと移り変わり (図.1-(a))、二次相転移が存在することを示している。 $F(M_s)$ の変域は

$$0 > F(M_s) > F(0) = rr_m^2 \quad (38)$$

となり、

$$r > -\frac{h^2}{r_m^2}w \quad (39)$$

が Φ_d の変域であることがわかる。

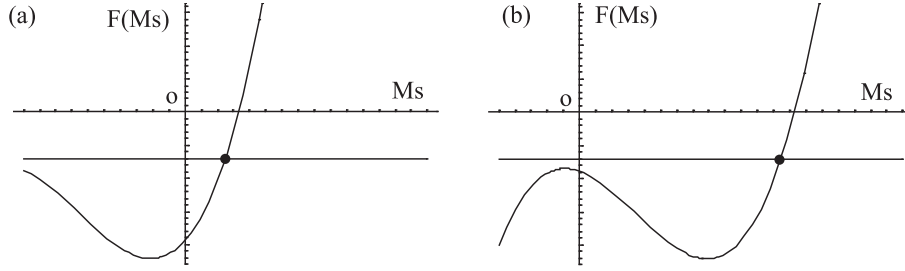


図 1: $F(M_s)$ の概形。(a): $M_{sL} < 0$ のとき。(b): $M_{sL} > 0$ のとき。

一次相転移

$M_{sL} > 0$ 、つまり $r < -\frac{2ur_m}{w}$ のとき、関数 $F(M_s)$ は $M_s > 0$ で $M_s = M_{sL}$ で極小値をとる (図.1-(b))。 Φ_c が安定である領域は $r > -h^2w/r_m^2$ である。 $r < -h^2w/r_m^2$ においては、 $M_s \neq 0$ である一点が極小値をとる。 $r > -h^2w/r_m^2$ においては、 f は $M_s = 0$ と二つの $M_s \neq 0$ の計三点の極値がある。この領域において $M_s = 0$ は安定であり、 $M_s < M_{sL}$ である交点は極大値となっている。したがって、極小値は $M_s = 0$ と $M_{sL} > M_s$ である点である。関数 $F(M_s)$ と $-h^2w$ の交点は h が大きくなるにつれて下がっていく。 $F(M_{sL}) > -h^2w$ のときは交点が存在せず、この磁場が $M_s \neq 0$ の限界の磁場である。つまり、 $rr_m^2 > -h^2w < F(M_{sL})$ である領域は Φ_c 、 Φ_d とともに存在しうる。

ここで、 Φ_d を安定性の条件に当てはめ、満たすべき M_s が安定であるかを考える。式 (10) を変形すると

$$r + 12um_s^2 + w \left(\frac{h}{r_m + wm_s^2} \right)^2 > 0 \quad (40)$$

$$G(M_s) = 12uw^2M_s^3 + (rw^2 + 24uwr_m)M_s^2 + 2(rr_mw + 6ur_m^2)M_s + rr_m^2 > -h^2w \quad (41)$$

とすることができる。ある r のときの $F(M_s)$ と $G(M_s)$ の大小関係を比べると、

$$G(M_s) - F(M_s) = 8uw^2M_s^3 + 16uR_mwM_s^2 + 8ur_m^2M_s \quad (42)$$

$$= 8uM_s(wM_s + r_m)^2 \geq 0 \quad (43)$$

となり、あらゆる M_s で $G(M_s) \geq F(M_s)$ が成り立つことがわかる。つまり、 $-h^2w$ の $G(M_s)$ との交点を M_{sg} 、 $F(M_s)$ との交点を M_{sf} とすれば、つねに $M_{sf} \geq M_{sg}$ ($M_{sL} < M_{sf}$) であることがわかり、得られる解は式 (10) を常に満たすことがわかる。また、 $M_s > 0$ より式 (11) は常に満たす。次に、式 (12) から安定性の条件を考える。まず、解が M_{sL} であるときに、式 (12) が安定であるかを調べる。式 (12) を変形すると、

$$8um_s^2(r_m + wm_s^2) - 4w^2m_s^2 \left(\frac{h}{r_m + wm_s^2} \right)^2 \quad (44)$$

$$= \left(\frac{m_s^2}{r_m + wm_s^2} \right)^2 (8u(r_m^2 + wm_s^2)^3 - 4w^2h^2) \quad (45)$$

となる。さらに、 $M_{sL} = -\left(\frac{r}{6u} + \frac{r_m}{3w}\right)$ を代入し、式 (7) を用いて変形すると、

$$\left(\frac{m_s^2}{r_m + wm_s^2}\right)^2 \left(8uw^3 \left(-\frac{r}{6u} + \frac{2r_m}{3w}\right)^3 + 4wF\left(-\left(\frac{r}{6u} + \frac{r_m}{3w}\right)\right)\right) \quad (46)$$

$$= \left(\frac{m_s^2}{r_m + wm_s^2}\right)^2 ur_m^3 \left(8\left(-\frac{X}{6} + \frac{2}{3}\right)^3 + \frac{4w}{ur_m^3} F\left(-\frac{r_m}{w} \left(\frac{X}{6} + \frac{1}{3}\right)\right)\right) \quad (47)$$

$$= \left(\frac{m_s^2}{r_m + wm_s^2}\right)^2 ur_m^3 \times \left(8\left(-\frac{X}{6} + \frac{2}{3}\right)^3 - 16\left(\frac{X}{6} + \frac{1}{3}\right)^3 + 32\left(\frac{X}{8} + 1\right)\left(\frac{X}{6} + \frac{1}{3}\right)^2 - 48\left(\frac{X}{6} + \frac{1}{3}\right)^2 + 4X\right) \quad (48)$$

となる。ここで $X = \frac{rw}{ur_m}$ とおいた。これは三次関数のように見えるが、実はさらに展開していくと

$$\left(\frac{m_s^2}{r_m + wm_s^2}\right)^2 ur_m^3 \times 0 = 0 \quad (49)$$

となる。言い換えれば、解として M_{sL} を与えるような磁場を h^* とすると

$$\left(\frac{m_s^2}{r_m + wm_s^2}\right)^2 (8u(r_m^2 + wM_{sL}^2)^3 - 4w^2h^{*2}) = 0 \quad (50)$$

がなりたっているということである。したがって、 $h < h^*$ では、 $M_{sL} < M_s$ より $8u(r_m^2 + wM_{sL}^2)^3 < 8u(r_m^2 + wM_s^2)^3$ 、 $4w^2h^{*2} > 4w^2h^2$ より、

$$\left(\frac{m_s^2}{r_m + wm_s^2}\right)^2 (8u(r_m^2 + wm_s^2)^3 - 4w^2h^2) > 0 \quad (51)$$

となり、安定性の条件 (12) を満たす。 $h < h^*$ が Φ_d が安定して存在できる領域である。ここで、 h^* は $F(M_{sL}) = -h^*w$ を満たす磁場である。

以上から、 Φ_c と Φ_d の両方が安定である領域が存在する。そして、自由エネルギーが低い値をとるほうが実際に実現する解を与える。ある r に対して、 $f(0) = f(M_s)$ となる h の値が、一次相転移線を与える。

以上から、一次相転移線と二次相転移線のつなぎ目である、 $r = -\frac{2ur_m}{w}$ かつ $h^2 = \frac{2ur_m^3}{w}$ が三重臨界点であることがわかる。

相図

横軸 h 、縦軸 r で相図を描く (図.2)。図中の一次相転移線は定量的に求めていないが、 Φ_c と Φ_d の両方が安定な領域は $-h^2w = rr_m^2$ 付近にあるのでそれがわかるように線を描いた。縦軸を m 、横軸を r としたグラフを描くことを考える。このとき、ある r にたいして、磁場は臨界磁場にあるとする。また、三重臨界点近傍のみを考える。 $r > -\frac{2ur_m}{w}$ のとき、二次相転移が起きており、このとき $M_s = 0$ であるから、

$$m = \frac{h}{r_m} \quad (52)$$

である。また、三重臨界点近傍であるから、

$$r = -\frac{h^2}{r_m^2}w \quad (53)$$

$$m = \sqrt{-r/w} \quad (54)$$

となる。

$r < -\frac{2ur_m}{w}$ のとき、一次相転移であり臨界磁場上では $M_s = 0$ と $M_s \neq 0$ が共存している。

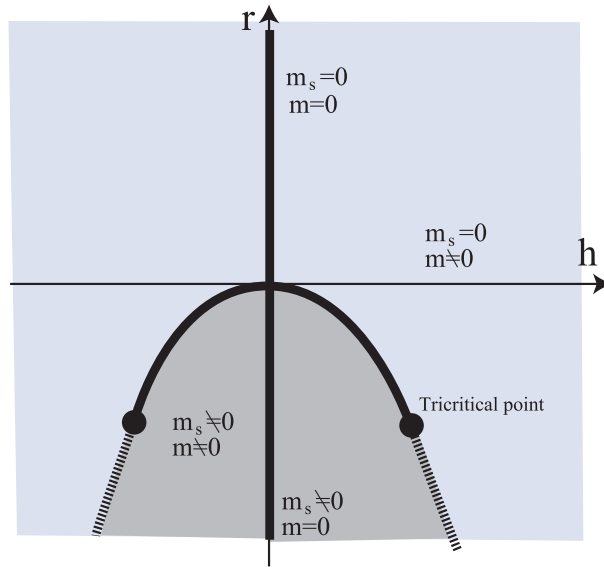


図 2: 縦軸 r 、横軸 h における相図。三重臨界点が存在する。実線は二次相転移線、点線は一次相転移線。

$M_s = 0$ のとき、

$$m = \frac{h}{r_m} \quad (55)$$

である。また、三重臨界点近傍では

$$r = r_t - \frac{h^2 w}{r_m} \left[\eta - \frac{1}{4} \eta^2 \right] \quad (56)$$

である。これを h 依存性をあらわにして書き直すと

$$r = -\frac{h^2}{r_m} w + \frac{1}{4} \frac{h^2}{r_m} w - \frac{wh_t^2}{4r_m} + \frac{r_m}{4} - \frac{h_t^2 r_t}{4h^2} \quad (57)$$

となる。この関数は $h = h_t$ において二次相転移線と連続になっている (図.3-(a))、 $r-h$ グラフにおいては、一次相転移線の方が傾きが小さい。 m は磁場に比例しているので、 m を縦軸、 r を横軸ととれば、二次相転移のとき

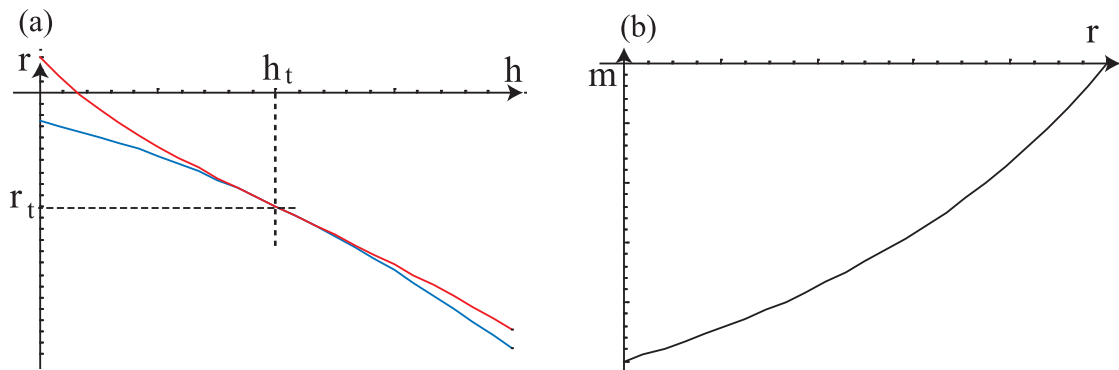


図 3: (a): 三重臨界点近傍における転移線の変化。 h が大きくなると青線から赤線へと移り変わる。(b): $m_s \neq 0$ のときの、磁化 m の r 依存性の概形

よりも傾きが大きいことがわかる。

$M_s \neq 0$ のとき、

$$m = \frac{h}{r_m + wM_s} \quad (58)$$

である。 $M_s \neq 0$ の安定性の限界は $M_s = M_{sL}$ であるから、三重臨界点近傍の一次相転移線上の M_s もそう変わらないと考えられる。 $M_{sL} = -\left(\frac{r}{6u} + \frac{r_m}{3w}\right)$ であり r に比例する。 r が負方向に大きくなると極小値の位置 M_{sL} は大きくなり、安定な解である M_s は大きくなる。 ゆえに、 m は

$$m \propto \frac{1}{r_m + pr} \quad (59)$$

という r 依存性を持つ (図.3-(b))。 ここで p は比例定数である。 以上より、得られるグラフは図.4 のようになる。

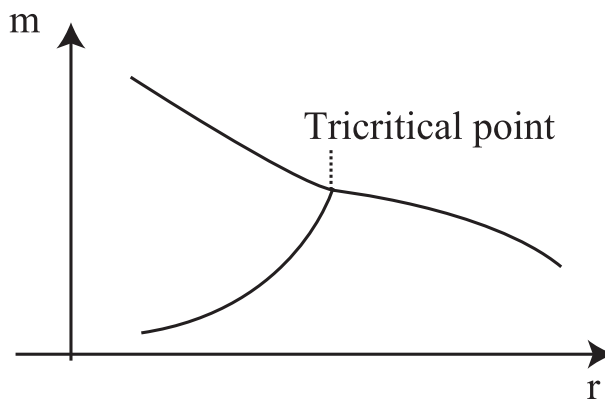


図 4: 磁化 m の r 依存性の概形。