3.1 相互作用のない古典気体

チェイキン＆ルベンスキー「現代の凝縮系物理学」（吉岡書店）の章末問題

永井佑紀

平成 17 年 8 月 17 日

相互作用のない古典的気体に対して $\mathcal{A}[T,\mu(\mathrm{x})]$ および $F[T,n(\mathrm{x})]$ を計算せよ。

$\mathcal{A}[T,\mu(\mathrm{x})]$

外部からの一体のポテンシャル $u(\mathrm{x})$ を化学ポテンシャルのずれと解釈すると

$$\mu \to \mu(\mathrm{x}) = \mu + u(\mathrm{x}) \tag{1}$$

となる。このとき、N 粒子の相互作用のない古典系における分配関数 Z_N、グランドカノニカル統計における大分配関数 Ξ は

$$Z_N = \frac{V^N}{N!}\left(\int \frac{dp}{h}e^{-\beta p^2/2m}\right)^{3N} = \frac{1}{N!}\frac{V^N}{\lambda^{3N}} \tag{2}$$

$$\Xi = \sum_N e^{\beta\int d^dx\mu(\mathrm{x})n(\mathrm{x})}Z_N = \sum_N e^{\beta\int d^dx\mu(\mathrm{x})n(\mathrm{x})}\frac{1}{N!}\frac{V^N}{\lambda^{3N}} \tag{3}$$

である。ただし、

$$\lambda = \frac{h}{(2\pi mT)^{1/2}} \tag{4}$$

である。$\mathcal{A}[T,\mu(\mathrm{x})]$ の定義は

$$\mathcal{A}[T,\mu(\mathrm{x})] = -T\ln\Xi[T,V,\mu(\mathrm{x})] \tag{5}$$

であるから、

$$\mathcal{A}[T,\mu(\mathrm{x})] = -T\ln\left(\sum_N e^{\beta\int d^dx\mu(\mathrm{x})n(\mathrm{x})}\frac{1}{N!}\frac{V^N}{\lambda^{3N}}\right) \tag{6}$$

となる。

$F[T,n(\mathrm{x})]$

$F[T,n(\mathrm{x})]$ の定義は

$$F[T,n(\mathrm{x})] = \mathcal{A}[T,\mu(\mathrm{x})] + \int d^dx\mu(\mathrm{x}) < n(\mathrm{x}) > \tag{7}$$

である。よって、

$$F[T,n(\mathrm{x})] = -T\ln\left(\sum_N e^{\beta\int d^dx\mu(\mathrm{x})n(\mathrm{x})}\frac{1}{N!}\frac{V^N}{\lambda^{3N}}\right) + \int d^dx\mu(\mathrm{x}) < n(\mathrm{x}) > \tag{8}$$

$$= -T\ln\left(\sum_N e^{\beta\int d^dx\mu(\mathrm{x})n(\mathrm{x})}\frac{1}{N!}\frac{V^N}{\lambda^{3N}}\right) + \int d^dx\mu(\mathrm{x}) < n(\mathrm{x}) > \tag{9}$$

となる。