GL theory におけるコヒーレント長

永井佑紀

平成 17 年 8 月 2 日

GL 方程式を用いてコヒーレント長を求める。

GL 方程式

前の Note で導出した GL 方程式は

$$\mathrm{rotrot}\boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{1}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{ie^*}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2 \psi = -\alpha\psi - \beta|\psi|^2\psi \tag{2}$$

である。ここで

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar e^*}{2m^* i}\left(\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{r}}\psi\right) - \frac{(e^*)^2}{m^* c}|\psi|^2\boldsymbol{A} \tag{3}$$

である。

4.2.1 The Ginzburg-Landau Coherence Length

簡単のために、$\boldsymbol{A} = 0$ のときを考える。このとき、GL 方程式の係数はすべて real であるから、求める ψ も real である。このとき方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\alpha\psi - \beta|\psi|^2\psi \tag{4}$$

である。無次元化 $f = \psi/\psi_\infty$ を行うと、

$$\psi_\infty\left(-\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2 f}{dx^2} + \alpha f - \alpha f^3\right) = 0 \tag{5}$$

となる。ここで $|\psi_\infty|^2 = -\alpha/\beta$ を用いた。ψ が平衡値 ψ_∞ から小さなずれ ψ_1 を持ったとする。このずれの値を見積もることを考える。$f = (\psi_\infty + \psi_1)/\psi_\infty = 1 + g$ とおくと、

$$\xi^2\frac{d^2 g}{dx^2} + (1+g) - (1 + 3g + 3g^2 + g^3) = 0 \tag{6}$$

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha(T)|} \propto \frac{1}{1-t} \tag{7}$$

となる。ずれは小さいとしているので、g の一次までとると、

$$\xi^2\frac{d^2 g}{dx^2} - 2g = 0 \tag{8}$$

$$g(x) \sim e^{\pm\sqrt{2}x/\xi(T)} \tag{9}$$

となる。これはつまり、平衡値からのずれが生じたとしてもそのずれは空間的には特徴的な長さ ξ までしか到達しないということである。また、$T = T_c$ で ξ は発散することにも注意しなければならない。

$\xi(T)$ を他の物理量で表すことを考える。

$$\alpha(T) = -\frac{e^{*2}}{m^* c^2} H_c^2(T)\lambda_{\mathrm{eff}}^2(T) = -\frac{2e^2}{mc^2} H_c^2(T)\lambda_{\mathrm{eff}}^2(T) \tag{10}$$

であるから、

$$\xi(T) = \frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi H_c(T)\lambda_{\mathrm{eff}}(T)} \tag{11}$$

となる。ここで磁束量子を

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2^*} = \frac{hc}{2e} \tag{12}$$

と定義して用いている。磁束量子はのちのち重要な役割を果たす。また、$\xi(T)$ は、Pippard と BCS による ξ_0:

$$\Phi_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \pi^2 \xi_0 \lambda_L(0) H_c(0) \tag{13}$$

によって関係付けられている。$N(0)$ と n の間に自由電子の関係を用いることができるのであれば、BCS の結果から $\xi_0 = \hbar v_F/\pi\Delta(0)$ であり、$H_c(0)^2/8\pi = \frac{1}{2}N(0)\Delta^2(0)$ という結果が得られている。式 (11) を書き直し $\xi(T)$ と ξ_0 の比を取ると

$$\frac{\xi(T)}{\xi_0} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{H_c(0)}{H_c(T)} \frac{\lambda_L(0)}{\lambda_{\mathrm{eff}}(T)} \tag{14}$$

となる。BCS 理論から $T \approx T_c$ では

$$H_c(t) = 1.73 H_c(0)(1-t) \tag{15}$$

$$\lambda_L(t) = \frac{\lambda_L(0)}{[2(1-t)]^{1/2}} \tag{16}$$

$$\lambda_{\mathrm{eff}}(t) = \lambda_L(t)\left(1 + 0.75\frac{\xi_0}{l}\right)^{1/2} \tag{17}$$

$$\lambda_{\mathrm{eff}}(t)\Big|_{\mathrm{dirtylimit}} = \lambda_L(t)\left(\frac{\xi_0}{1.33l}\right)^{1/2} \tag{18}$$

であるから、$\xi(T)$ は

$$\xi(T) = \frac{0.74}{\sqrt{1 + 0.75(\xi_0/l)}} \frac{\xi_0}{(1-t)^{1/2}} \tag{19}$$

となる。ここで、l は平均自由行程である。さらに、上式は pure な超伝導体であるか dirty な超伝導体であるかで場合わけできて、

$$\xi(T) = 0.74\frac{\xi_0}{(1-t)^{1/2}} \qquad \mathrm{pure} \tag{20}$$

$$\xi(T) = 0.855\frac{(\xi_0 l)^{1/2}}{(1-t)^{1/2}} \qquad \mathrm{dirty} \tag{21}$$

となる。pure な超伝導体に適用される式 (20) が妥当性を持つのは、T_c のごく近傍に限られる。その近傍のみ局所的な電気力学が妥当性を持つからである。その外側では、ξ の適切で有効的な値は試料の形状によってしまう。一方、dirty な超伝導体に適用される式 (21) は、もっと広い温度領域で妥当性を持つ。なぜならば、dirty な超伝導体において、局所近似はよい近似だからである。

ここで、Ginzburg-Landau パラメータ κ を導入する。κ は二つの特徴的な長さの比:

$$\kappa = \frac{\lambda_{\mathrm{eff}}(T)}{\xi(T)} = \frac{2\sqrt{2}H_c(T)\lambda_{\mathrm{eff}}^2(T)}{\Phi_0} \tag{22}$$

で定義される無次元量である。経験的に得られている近似 $H_c \propto (1-t^2)$ と $\lambda^{-2} \propto (1-t^4)$ を用いるならば、

$$\kappa \propto \frac{1-t^2}{1-t^4} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)(1-t^2)} = (1+t^2)^{-1} \tag{23}$$

となる。もちろんこれは粗い近似ではあるが、臨界温度で κ が特異的ではなく近傍では緩やかに変動している、と結論付けてもよいだろう。$T = T_c$ においての κ を求める。先ほどと同様に、BCS の結果を代入すると

$$\kappa|_{Tc} = \frac{\lambda_L(0)(1 + 0.75(\xi_0/l))}{0.74\sqrt{2}\xi_0} \tag{24}$$

となるから pure と dirty では

$$\kappa = 0.96\frac{\lambda_L(0)}{\xi_0} \qquad \text{pure} \tag{25}$$

$$\kappa = 0.715\frac{\lambda_L(0)}{l} \qquad \text{dirty} \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

となる。典型的な pure な超伝導体においては $\kappa \ll 1$ であるが、dirty な超伝導体や高温超伝導体においては κ は 1 より大きいことがある。今後の議論において、$\kappa = 1/\sqrt{2}$ が超伝導体が第一種になるか第二種になるかの境目になっていることがわかる。