

セルオートマトンによる複雑現象のモデル化

西成 活裕

理工学部数理情報学科

1 はじめに

物理学の世界は今、ちょっとした「複雑系」ブームである。物理学の歴史は古いが、それがこれまで対象にしてきたものは、主に「血の通っていない」物質である。そして、生物や社会現象などはその対象外であった。その理由の一つに、これらはあまりにも現象が複雑すぎて、対象を数学的に記述するのが出来なかったことがあげられる。例えば、ある動物を表す微分方程式があったとする。すると、その方程式を解けば、それがこれからどのような行動をするか分かるし、もしかするとその寿命も分かってしまうかも知れない。また、ある会社の株価の動きを表す方程式があったとする。すると、その方程式の解が分かれば将来の株価が全て分かってしまうので、大儲けが出来ることになる。こんなことは出来るはずがないことは誰でも分かっているが、それではなぜ出来ないのだろうか？これに正確に答えるのは意外に難しい。

ちょっと前までは、たとえ方程式は作れても、それがあまりにも複雑で解けないからだと考えられていた。しかし、事情はカオス理論の登場で一変する。カオス理論によれば、いくら単純な方程式でも、ある条件の下ではその解は極めて複雑な挙動を示し、また初期条件のわずかな違いで将来の様子が全く異なるものになりうるということが明らかになった。したがっていくら精密な微分方程式を立てても、初期条件を無限の精度で与えることは不可能であり、対象がカオスであるならば、それは事実上予測不可能であるということである。

しかし社会的な要請などにより、近年の物理学の対象はこれら複雑系にまで広がってきた。そこでまず、ミクロな立場からの微分方程式の作成、という従来の解析方法を反省することからその研究は始まった。そして複雑でマクロな対象を、ミクロに分解せずにそのまま扱うことが出来ないか検討された。これはもちろん未だに解決してはならず、現在でも様々な研究が続けられている。

ここで注目されてきたのがセルオートマトン (Cellular Automaton, 略して CA と呼ばれる) である。もともとはコンピューターの生みの親であるフォン・ノイマンが戦前に考えた方法であるが、最近になって、ウルフラム [1] がその理論体系を築き上げ、現在様々な分野で研究手法として用いられている。特に、従来のように微分方程式を出発点とするアプローチではどうにもならなかったような社会学や生物学、化学の分野で広く用いられるようになってきた。そして複雑な現象をある程度再現しうる様々な CA モデルが提唱されてきている [2]。

この方法は現在も研究が発展しつつあり、それがどこまで複雑系に対して有効かは今後の研究を待たなければならない。この記事では、CA とは何か、そしてどのような応用があるのか、その研究の現状の一端を以下に紹介する。

2 CA とは何か

対象をミクロに見て、その全体を記述する方法が従来の微分方程式による手法である。これまでの物理学はこの方法に強く依存していた。そして微積分は人類の考え出した最も強力な数理的な武器であり、これまで大いに成功を収めてきた。しかし複雑系においては、ミクロに見るときりがなくらいの沢山の要素が絡み合い、微分方程式ではどうしようもなくなってくる。

そこで、対象を大まかに見て、おおよその機能だけを抽出し、本質を失わない程度に単純化してみようとするのは自然な考えである。このようなものの見方を「粗視化」という。例えば、車の流れを考えてみよう。高速道路の車の流れは非常に複雑であり、一本の何も無い道路を考えても、あるときは渋滞し、あるときは自由に車が流れている。渋滞の原因としては、料金所や合流部、坂道、故障車等の影響や、原因がはっきり分からないものも観測されている。これらの様子を表す微分方程式をきちんと作れた人はまだいないが、次のように単純化して考えてみよう。

まず、道路を適当に等間隔に区切る。そして、一つの区切りをサイト、あるいはセルと呼ぶ。その一つのセルには車は1台だけ入ることが出来るとする。さらに時間も何秒かごとく等間隔に分ける。その一つの時間間隔を新しい時間1ステップとする。ここで、車は時間1ステップで、1セル分動けるとしよう。もちろん前に車がいれば動けないとする。また、車のいるセルを1、いないセルを0で表すことにする。

以上より、例えば進行方向を右にとれば、このルールにより車(この場合、数字の1)の動きは図1のように表されることが分かる。

$t = 0$...	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
$t = 1$...	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
$t = 2$...	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
$t = 3$...	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$t = 4$...	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

図1：車の動きを表すCAモデルによる時間発展の様子

図1を良く見ると、ある1の前がまた1の時は止まり、前が0の時のみ進むというだけの単純なルールである。しかし、1のかたまり(渋滞部分)はちゃんと後ろに伝播しており、また後から示す理由などにより、これでも結構よい車の動きのモデルになっているのである。

このように対象を大まかなセルに分け、そのセル内のとり得る値の種類を k 状態とし(上の場合には0と1の2状態)、セルの値の時間変化をあるルールによって定めたものがCAである。オートマトンという言葉は、無理に訳せば「自動機械」となるが、単純なルールで次々と機械的に値を更新していくことからこの名前がついたものと思われる。

もう少しきちんとCAを定義しよう。上のCAの例はセルの1次元的な横並びを考えており、1次元CAと言われる。そして、あるセルの値の時間変化は、その両隣のセルの値と自分自身の値の合計3つのセルによって決められている。これを3近傍ルールという。こ

れを式で表すと、セルの位置座標を j 、時間を t 、その時のセルの値を $U_j^t \in \{0, 1\}$ と表し、時間変化は

$$U_j^{t+1} = f(U_{j-1}^t, U_j^t, U_{j+1}^t) \quad (1)$$

と書ける。これが 1 次元 2 状態 3 近傍 CA の一般形である。そして、関数 f は上の車の例の場合は、

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) = 0, f(0, 0, 1) = 0, f(0, 1, 0) = 0, f(0, 1, 1) = 1, \\ f(1, 0, 0) = 1, f(1, 0, 1) = 1, f(1, 1, 0) = 0, f(1, 1, 1) = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

と選べばよいことがすぐに分かる。あるいは、(1) と (2) とを一緒に記号的に

$$\frac{U_{j-1}^t U_j^t U_{j+1}^t}{U_j^{t+1}} = \frac{000}{0}, \frac{001}{0}, \frac{010}{0}, \frac{011}{1}, \frac{100}{1}, \frac{101}{1}, \frac{110}{0}, \frac{111}{1} \quad (3)$$

と書く場合もある。この記号の意味は見れば明らかであろう。

さて、1 次元 2 状態 3 近傍 CA の式 (1) は全部で何種類あるか、ということを考えてみよう。関数 f の引数の中の 0 と 1 の組み合わせは、000 から 111 までの全部で 8 個あり、その各々に対して f の値は 0 か 1 の 2 つの値をとる。したがって、全部で $2^8 = 256$ 通りのルールが存在することが分かる。ウルフラムはこれらに 0 から 255 までのルール番号をつけて分かりやすく整理した。例えば、(3) の分母だけを右から並べて書くと、10111000 となり、これを 2 進数と見れば 10 進数では 184 という数字である。したがってこの車の場合のルールはルール 184 と言われる。このように、分母を逆順に並べてルール番号を 0(00000000 の場合) から 255(11111111 の場合) まで定義する。

この 256 個のルールの中には、車のモデルとしてのルール 184 以外にいくつか面白いルールが知られている。その一つがルール 90 であり、その時間発展は

$$\frac{U_{j-1}^t U_j^t U_{j+1}^t}{U_j^{t+1}} = \frac{000}{0}, \frac{001}{1}, \frac{010}{0}, \frac{011}{1}, \frac{100}{1}, \frac{101}{0}, \frac{110}{1}, \frac{111}{0} \quad (4)$$

となる。このルールに従って時間発展させたのが図 2 である。

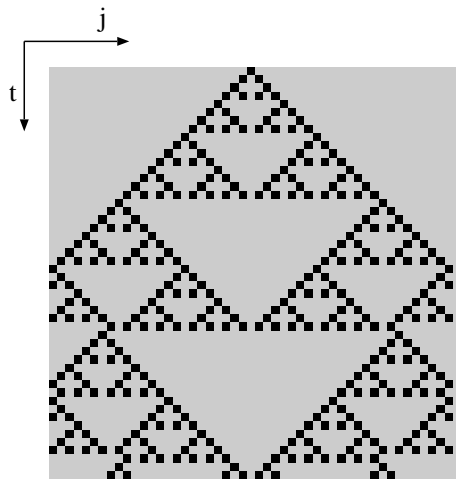


図 2 : ルール 90 による時間発展の様子

ただし、黒が1で灰色が0を表している。そして初期状態は真中だけが1であとは全てゼロとおいた。セルの数は50とし、時間も50ステップ分動かして書いてある。これは、三角形からそれと相似な三角形を次々とり抜いて作るフラクタル図形の「シェルピンスキーガスケット」といわれるものとそっくりである [3]。このような複雑なフラクタル図形がルール90から生じるなどとは全く予想もしていなかったことである。

それでは、次に1次元2状態5近傍CAについて考えてみよう。これはあるサイトの時間変化がその両隣り2サイトづつに関係しているものである。この場合は、ルール数は全部で 2^{32} 通りであり、約43億通りにもなる。単純なCAにもかかわらず、このような多様性があるところが興味深いところである。ちなみに、3近傍の場合はすべてその時間変化が調べられており、0と1をそれぞれ赤と青などで色分けすれば時間発展はきれいな模様になる。それをウルフラムは256通りの絵はがきにして売っているという話を聞いたことがある。そして5近傍の場合は43億もあるので全部調べた人はいない。この中に何かたっくさんの宝が眠っているかも知れないのである。さらに2次元以上に拡張するのも容易である。そして、その応用として、流体の複雑な流れをある程度再現する格子ボルツマン法などが提案されている [4]。

3 交通流モデルについて

前節で、交通流モデルとしてのルール184を導入したが、これが正しいモデルなのかそうでないのかはどうしたら分かるのだろうか？ 図1を見る限りでは、なんとなく車の動きのようにも見え、単純化したモデルとしてはまあ良さそうな気もする。

交通流の良いモデルとして最も重要な事は、いつどういった状況の時に交通渋滞が起こるのかをきちんと捉えられることである。車はある密度以上になると渋滞し始める。この渋滞の開始をきちんと捉えることが出来なければ、モデルの信頼性は極めて低い。渋滞現象を見るには通常、交通工学では基本図といわれる関係図を調べる。これは横軸に車の密度、縦軸に交通流量を取ったものとして定義される。CAモデルでもまず、この基本図を書いてみよう(図3)。

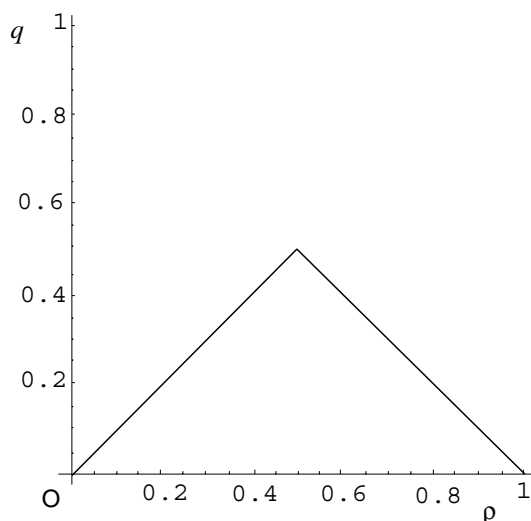


図3：ルール184CAモデルによる基本図

ただし、ある時間における密度 ρ^t と交通流量 q^t は空間平均で考え、それぞれ

$$\rho^t \equiv \frac{1 \text{ の総数}}{\text{セルの総数}} \quad (5)$$

$$q^t \equiv \rho^t \frac{\text{時間1ステップで動いた1の数}}{1 \text{ の総数}} \quad (6)$$

のように与える。つまり、道路に単位セルあたり平均して何台車がいるのかが密度であり、車がまったく無い場合は0、道が全て車で埋まっているときは1になる。また、(6)の右辺の分数は車の平均速度を表しており、それに密度をかけたものが流量の定義である。図3の書き方は、まず適当な初期条件を乱数で発生させ、それらを沢山選んで各々定常状態になるまで計算し、その時の密度と流量の値を求める。それらを $q - \rho$ グラフ上に重ねてプロットすればよい。

右上がりの部分が非渋滞領域で、右下がりの部分が渋滞領域を表す。そして、ちょうど $\rho = 1/2$ の密度のときに渋滞相への相転移が起きていることが分かる。それでは次に現実の交通流とルール184CAモデルの基本図を見比べてみよう。図4が現実の交通流の実測データである [5]。これは1996年1月の東名高速道路の日本坂トンネル手前付近上り方面

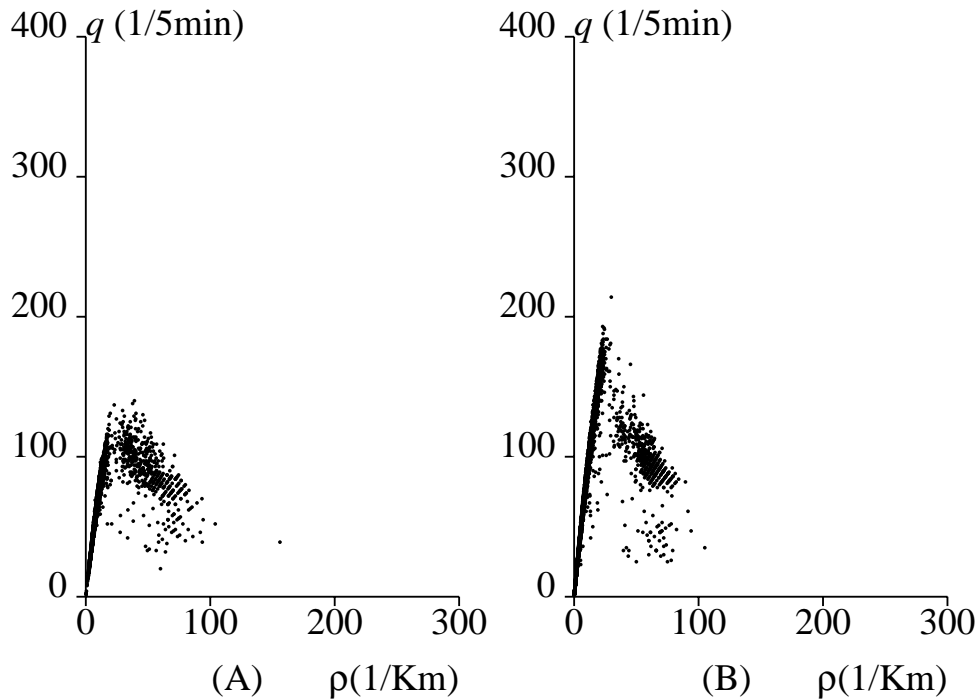


図4：東名高速道路の実測による基本図

のデータで、図4.(A)が走行車線、図4.(B)が追い越し車線の基本図である。現実のものは基本的に揺らぎが入っているが、平均化して考えると、走行車線の方はルール184と似た3角形になっており、25台/kmあたりで渋滞になっていることが分かる。CAモデルに揺

らぎを入れるのは容易であり、それによりさらに現実のデータの基本図に似ることが示せるが、ここでは割愛する。

そして、実は重要なのが図 4.(B) であり、この場合は単純な 3 角形でなく、漢字の「人」のような図形になっていることに気付く。つまり、右上がりの非渋滞相から右下がりの渋滞相への移行はそう単純ではなく、現実には非渋滞相のオーバーシュートが存在すると考えられる。これは物理的に考えても明らかであり、過密度で高速な流れは不安定であるがある程度存在して、これは基本図において自由走行を示す直線が渋滞になる臨界密度を越えて長く伸びた状態（メタ安定分岐）として表現できる。そしてこの不安定な流れは高速交通流の持つ本質的な性質であり、追い越し車線で顕著に観測され、自然渋滞を引き起こす要因として考えられている。

したがって現実の交通流の特性を表すにはこの様子を表現できる CA が望ましい。残念ながら図 3 よりこのルール 184CA はこの不安定性を表現できない。従って、さらに良いモデルを得るためにはルール 184CA のままでなく、何らかの工夫が必要である。

それは次のようにして得られる。まず、時間 1 ステップを 2 つの手続きに分ける。まず、ルール 184 で 1 を動かす。そして「その動いた 1 の中で」さらに動けるものがあれば、もう 1 つ動かす。この新しいルールでは、実は時間 1 ステップで 2 つのセルを動ける車があり、ルール 184 の速度アップ版、と考えられる。そして、CA の理論からみれば、5 近傍の CA になっていることがすぐに分かるだろう。つまりこれは例の 43 億通りあるルールの一つになっている。図 5 がこのルールによる基本図である。今度は人型を示していることが

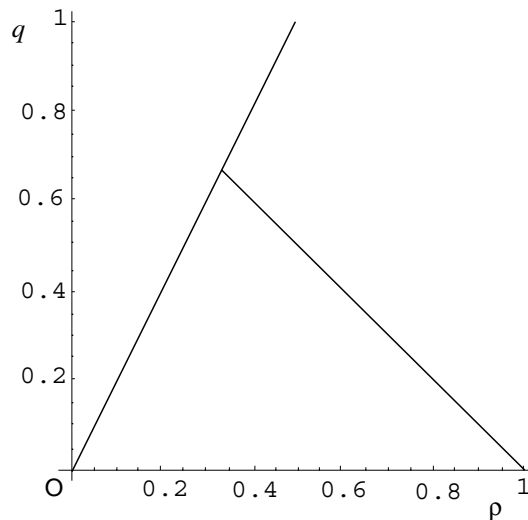


図 5：新しい 5 近傍ルールによる基本図

分かる。そして、密度が $1/3 \leq \rho \leq 1/2$ の範囲内で基本図にオーバーシュートがあり、さらに現実のデータに近い CA モデルが出来たことが分かる。

4 超離散とは何か

最後に最新の理論を一つ紹介しよう。CA はこれまで見た通り、従来の微分方程式とは全く異なるアプローチをする。そして、それは整数計算なので数値誤差は発生せず、また、単純なルールを設定してもその時間発展は極めて複雑な様相を示すので、複雑なシステムの非常に有力な解析手法として注目されている。しかし現時点で我々は、「CA のルールをどのように設定すれば対象としている系をうまく記述できるか」という疑問に答える回答を持ち合わせていない。これが CA の現在の最大の問題点あり、ルール決定の何らかの指針作りが望まれている。

微分方程式についてはある程度決まった規則に基づいて立式ができるが、CA にはそのようなものはまだ無い。そういう意味では複雑な系のモデル化手法としての CA は現在まだ未熟な段階にある。この問題を解決する一つの方法は、ある現象を表す微分方程式と、それに対応する CA とが何かの決まった「変換」で正確に結ばれることである。そうすれば微分方程式の方でのこれまでの蓄積を CA のルール設定に生かすことが出来るし、場合に応じて微分方程式と CA とを行き来しながら解けば良いことになる。だが、本当にこんなことが可能なのであろうか。

実はこの対応関係を実現する可能性を秘めた理論がある。それが超離散と言われる手法である [6]。これはもともとソリトンと言われるある性質の良い微分方程式に関して発見された方法であり、ソリトンの微分方程式の性質をほぼそのまま受け継ぐ対応する CA に変換する方法が発見された。

そこでここではその紹介を兼ねて、交通流研究で用いられている微分方程式であるバーガス方程式に超離散法を適用してみよう。1978年に武者と樋口はバーガス方程式を用いた密度揺らぎの解析を行い、交通流の密度変動が周波数の逆数になる、いわゆる「 $1/f$ ゆらぎ」を研究した [7]。これは実測データとも良く対応していることが論文で示されている。このバーガス方程式は変数変換により線形化出来るので、この「線形化可能」という解の性質を利用して超離散化を行なってみよう [8]。まず、バーガス方程式は

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} \quad (7)$$

である。これはコウル = ホップ変換

$$u = \frac{f_x}{f} \quad (8)$$

によって線形化出来て、次の熱伝導方程式

$$f_t = f_{xx} \quad (9)$$

になることは良く知られている。さて、この CA を求めるわけであるが、(7) を直接 CA に変換するのではなく、まず、第一ステップとして微分方程式から差分方程式に直さなくてはならない。つまり (7) の空間・時間変数を差分化する必要があるが、差分方程式でもこの線形化可能という構造を不変に保つために、まず熱伝導方程式から差分してゆく。それは

$$f_j^{t+1} - f_j^t = \delta(f_{j+1}^t - 2f_j^t + f_{j-1}^t) \quad (10)$$

としておこう。ただし、 $\delta = \Delta t / \Delta x^2$ であり、 Δt 、 Δx はそれぞれ時間差分間隔、空間差分間隔である。次に、(8) の離散版として

$$u_j^t = c \frac{f_{j+1}^t}{f_j^t} \quad (11)$$

というものを考える。ただし c は定数である。(11) から c を引いて $c \sim 1/\Delta x$ とおくと極限で(8)に一致することはすぐ分かる。次に(11)を用いて(10)を u のみで表すと

$$u_j^{t+1} = u_j^t \frac{1 - 2\delta + \delta(\frac{c}{u_j^t} + \frac{u_{j+1}^t}{c})}{1 - 2\delta + \delta(\frac{c}{u_{j-1}^t} + \frac{u_j^t}{c})} \quad (12)$$

となる。これが時間・空間の差分化されたバーガス方程式である。次にこれを CA に変換する。そのために従属変数を離散化する操作が必要であり、これが超離散と言われる手法である。まず、

$$u_j^t = \exp\left(\frac{U_j^t}{\varepsilon}\right) \quad (13)$$

とにおいて、新たに小さい変数 ε を導入する。さらに

$$\frac{1 - 2\delta}{c\delta} = \exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right) \quad (14)$$

$$\frac{1}{c^2} = \exp\left(-\frac{L}{\varepsilon}\right) \quad (15)$$

とにおいて、 δ, c の代わりに L, M を導入する。そして極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ を考える。すると、超離散公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log\left(\exp\left(\frac{A}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{B}{\varepsilon}\right)\right) = \max(A, B) \quad (16)$$

より、(12) は

$$U_j^{t+1} = U_j^t - \max(-M, -U_{j-1}^t, -L + U_j^t) + \max(-M, -U_j^t, -L + U_{j+1}^t). \quad (17)$$

となる。この公式(16)が超離散の最も重要な発見で、連続関数と不連続関数をつなぐ不思議な公式である。最後に(17)式を \min で表すと、公式 $\max(A, B) = -\min(-A, -B)$ より

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M, U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(M, U_j^t, L - U_{j+1}^t). \quad (18)$$

を得る。これがバーガス CA (Burgers CA、略して BCA) である。この BCA はもし $M > 0$ 、 $L > 0$ であり、かつ全ての j に対して $0 \leq U_j^t \leq L$ ならば、全ての j に対して $0 \leq U_j^{t+1} \leq L$ が成り立つことが示せる。つまり(18)は $\{0, 1, \dots, L\}$ の $(L+1)$ 状態 3 近傍 CA と見なすことができる。

さて、(18)において、 $L = M = 1$ と置いてみよう。この場合、全ての U_j^t は 0 か 1 の値をとる 2 状態 3 近傍の CA になる。この場合のルール番号はいくつになるだろうか。とりあえず(18)より真理値表を書き出してみると、

$$\frac{U_{j-1}^t U_j^t U_{j+1}^t}{U_j^{t+1}} = \frac{000}{0}, \frac{001}{0}, \frac{010}{0}, \frac{011}{1}, \frac{100}{1}, \frac{101}{1}, \frac{110}{0}, \frac{111}{1} \quad (19)$$

となる。これはまさにルール184であり、従ってBCAはルール184を特別な場合として含むことが分かる。これにより、一見異なる交通流モデルが数理的に密接な関係にあることが明らかになったのである [9]。

5 おわりに

一説によれば交通渋滞による経済的損失は年間27兆円に達すると言われている。交通渋滞を予測する有用なシミュレーターが求められている昨今、実際の道路の配置を入れてシミュレーションし、車線変更や合流分岐などを扱うために今CAモデルは注目されている。これらは従来の微分方程式では扱えず、CAモデルが最も有用な手法であることは疑う余地が無い。

CA理論はまだまだ発展途中であるが、今後の研究次第で、微積分に匹敵する解析手法になるかも知れないと感じるときがある。特にコンピューターによる数値計算に適したCAは、ますます色々な分野で使われ、様々な複雑現象に応用されていくであろう。そのためにもまず、CAルール作成の指針作りが早急に望まれる。今回最後に紹介した超離散はその大きな鍵を握っている。

参考文献

- [1] S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata* (World Scientific, Singapore, 1986).
- [2] H. Gutowitz ed., *Cellular Automata Theory and Experiment*, (MIT Press, Cambridge, 1991).
- [3] 合原一幸編、「カオス-カオス理論の基礎と応用」(サイエンス社、1990).
- [4] J. Hardy, O. de Pazzis and Y. Pomeau, *Phys. Rev. A* **13** (1976) p.1949.
- [5] K. Nishinari and M. Hayashi (editors), *Traffic Statistics in Tomei Express Way*, (The Mathematical Society of Traffic Flow, Japan, 1999).
- [6] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) p.3247.
- [7] T. Musya and H. Higuchi, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **17** (1978) p.811.
- [8] K. Nishinari and D. Takahashi, *J. Phys. A* **31** (1998) p.5439.
- [9] 西成活裕「数理科学」No.435 (サイエンス社 1999年9月号) p.32.