

# 幾何と可積分性、およびその弾性体への応用

龍谷大学工学部数理情報学科

西成 活裕

## 1. はじめに

数学と弾性論の結びつきは古い。Euler や Cauchy は今日の弾性論を含めた連続体理論の骨格を築き上げ、またベクトルの一般化であるテンソルという言葉は、弾性論で応力を意味するフランス語の tension に由来する。そして、Courant は有限要素法の基礎理論を発展させ、それは今日、弾性構造解析の標準的な手法になっている。弾性論は幾何学と力学を融合させたような分野であり、そのため数学の中でも幾何学的手法の発展と密接に関わってきた。

一方、ソリトン理論は1960年代に端を発し、解ける非線形方程式を統一的に扱う枠組みが主に日本人数学者の貢献により完成した。そして、ソリトン理論はまた、幾何学と密接に関わっており、その意味で、ソリトン理論と弾性論は自然に結びつく。さらに、ソリトン理論では可積分性を保ったままの離散化が可能であり、これはまた離散幾何、そして離散弾性モデルと自然に結びつく。

本研究ではこの事実に着目し、弾性棒の基礎式に対してソリトン理論を適用し、従来の摂動論などの方法では理論的には扱えなかった弾性体の大変形解析を試みた。特にループや螺旋など特別な場合はソリトン理論の厳密解を利用した大変形解析が可能である。この研究は連続理論と離散理論をすべて並行して行っている。特に離散化されたソリトン理論と弾性体の離散モデルを構築することにより、新しい1次元弾性体の離散基礎式を得ることが出来た。これは数値計算に適した形になっており、容易に3次元空間を運動する弾性体を扱える。そしてこの離散モデルは弾性体の新しい数値計算のスキームとして実用上有用であることを示し、いくつかの産業への応用例を紹介する。

## 2. 弾性棒と特殊コッセラー理論

弾性棒は古くはオイラーの時代より研究されてきたが、その大変形運動の際にも矛盾の無い理論が出来たのは比較的新しく、20世紀初頭になってからである。それは幾何学的に断面における曲線座標を導入し、新しい自由度を取り入れたもので、現在ではコッセラー理論として知られている。これは弾性体の定式化の現在の標準的なモデルである。この理論では、1次元弾性体をその中立軸の運動と断面の運動の連成で考え、断面の運動は、中立軸の各点に付随する一種の「内部自由度」の運動、と捉えるところがポイントになる。このような新たな内部自由度を持つ理論を極性理論と呼ぶ。しかしその一般式は極めて抽象化されており、そのままでは具体的な計算を遂行することが出来ない。通常はベルヌーイ=オイラーの仮定をおき、断面のせん断力を構成方程式で定めない形式をとって簡略化する。これを特殊コッセラー理論と呼ぶ [1][2]。まずこれを簡単に述べる。

弾性棒は伸びを考慮し、伸びていないときの弾性棒にそった長さのパラメータを  $\sigma$  とする。位置ベクトルは  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\sigma, t)$  と表され、接単位ベクトル  $\mathbf{t}$  は

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} = \sqrt{g} \mathbf{t} \quad (1)$$

で定義できる。ここで、 $g$  はメトリックで

$$g = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \quad (2)$$

によって定められる。この  $g$  を用いると、弧長  $s$  は

$$s = \int_0^\sigma \sqrt{g(\sigma', t)} d\sigma' \quad (3)$$

で与えられる。フレネー座標  $\mathbf{t}$ 、 $\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{b}$  は

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & -\eta \\ -\kappa & 0 & \tau \\ \eta & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (4)$$

によって定まり、 $\eta$  と  $\kappa$  は曲率成分であり、 $\tau$  はねじりを表す曲率である。以上の準備のもとに、特殊コッセラ理論の基礎方程式は

$$\rho Z \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma} \quad (5)$$

$$\rho I (\mathbf{n} \times \frac{d^2 \mathbf{n}}{dt^2} + \mathbf{b} \times \frac{d^2 \mathbf{b}}{dt^2}) = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \times \mathbf{S} \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{S}$  と  $\mathbf{M}$  はある断面にかかる応力とモーメントであり、 $\rho$  は線密度、 $Z$  は断面積、 $I$  は断面 2 次モーメントである。ここで、断面は円形であると仮定しワーピングは起こらないとする。時間に関する微分は、弾性棒が伸びる場合全微分と偏微分を区別しなくてはならない。それは

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ds}{dt} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} + \left( \int \frac{d}{dt} \ln \sqrt{g} ds \right) \frac{\partial}{\partial s} \quad (7)$$

となる。そして、 $t$  と  $s$  は可換でないが、 $t$  と  $\sigma$  は可換になることに注意する。

(5) と (6) とにおいて、応力とモーメントは

$$\mathbf{S} = F \mathbf{t} + Q_1 \mathbf{n} + Q_2 \mathbf{b}, \quad (8)$$

$$\mathbf{M} = M_1 \mathbf{t} + M_2 \mathbf{n} + M_3 \mathbf{b} \quad (9)$$

と表され、 $F$  と  $M_i$  は次の構成方程式

$$F = EZ(\sqrt{g} - 1), \quad (10)$$

$$M_1 = GJ\tau\sqrt{g}, \quad (11)$$

$$M_2 = EI\eta\sqrt{g}, \quad (12)$$

$$M_3 = EI\kappa\sqrt{g} \quad (13)$$

で決められるとする。ここで、 $E$  はヤング率、 $G$  はせん断係数、またワーピングはないので  $J = 2I$  である。せん断力  $Q_1$  と  $Q_2$  とは構成方程式では定めず、力の釣合より求める。以上が特殊コッセラ理論の枠組での弾性棒の基礎方程式である。

### 3. ソリトン理論と弾性論 (連続版)

この節では、ソリトン理論と弾性論を融合する枠組を考える [3]。まず、ソリトン理論による曲線の運動の取り扱いについて述べる [4][5]。曲線の運動を一般に

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = U \mathbf{t} + W \mathbf{n} + V \mathbf{b} \quad (14)$$

とおく。そして、同様にフレネー座標の運動を

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A & B \\ -A & 0 & C \\ -B & -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (15)$$

とする。ただし、 $U, W$  及び  $V$  は紐の速度成分で  $A, B, C$  は以下で決定される。まず、(2) を時間で微分し (14) を用いると

$$\frac{d}{dt}g = 2g\left(\frac{\partial U}{\partial s} - \kappa W + \eta V\right) \quad (16)$$

を得る。そして (3) と (16) より交換関係

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{d}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial s} = \left(\frac{\partial U}{\partial s} - \kappa W + \eta V\right) \frac{\partial}{\partial s} \quad (17)$$

が得られる。(14) を  $s$  で微分し (4) (15) 及び (17) を用いることにより  $A$  と  $B$  について

$$A = \frac{\partial W}{\partial s} + \kappa U - \tau V, \quad (18)$$

$$B = \frac{\partial V}{\partial s} + \tau W - \eta U \quad (19)$$

となる。また (17) を使うことにより (4) と (15) の両立条件を計算でき、それにより曲率に対する以下の運動方程式

$$\frac{d\kappa}{dt} = \frac{\partial A}{\partial s} - \eta C - \tau B - \left(\frac{\partial U}{\partial s} - \kappa W + \eta V\right)\kappa \quad (20)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \kappa C - \frac{\partial B}{\partial s} - \tau A + \left(\frac{\partial U}{\partial s} - \kappa W + \eta V\right)\eta \quad (21)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial C}{\partial s} + \kappa B + \eta A - \left(\frac{\partial U}{\partial s} - \kappa W + \eta V\right)\tau \quad (22)$$

が得られる。ここで重要なことは (20) - (22) は特別な場合にソリトン方程式になり、厳密な解析が可能になる、という点である。それは  $U, W, V$  を曲率のある関数に選ばばよい [2],[3]。

最後に (14) を時間で微分し

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{dU}{dt} - WA - VB\right) \mathbf{t} + \left(\frac{dW}{dt} + UA - VC\right) \mathbf{n} + \left(\frac{dV}{dt} + WC + UB\right) \mathbf{b} \quad (23)$$

となるが、これと (5) の  $\mathbf{t}, \mathbf{n}$  及び  $\mathbf{b}$  の係数を比較することにより

$$\rho A \left(\frac{dU}{dt} - WA - VB\right) = EA \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \sigma} - \kappa \sqrt{g} Q_1 + \eta \sqrt{g} Q_2 \quad (24)$$

$$\rho A \left(\frac{dW}{dt} + UA - VC\right) = \frac{\partial Q_1}{\partial \sigma} + EA \kappa \sqrt{g} (\sqrt{g} - 1) - \eta \sqrt{g} Q_2 \quad (25)$$

$$\rho A \left(\frac{dV}{dt} + WC + UB\right) = \frac{\partial Q_2}{\partial \sigma} - EA \eta \sqrt{g} (\sqrt{g} - 1) + \eta \sqrt{g} Q_1 \quad (26)$$

を得る。同様に (15) を (6) の左辺に代入し  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  の係数を比較して

$$2\rho I \frac{dC}{dt} = GJ \frac{\partial \tau \sqrt{g}}{\partial \sigma} \quad (27)$$

$$\rho I \left(-\frac{dB}{dt} + AC\right) = EI \frac{\partial \eta \sqrt{g}}{\partial \sigma} - \sqrt{g} Q_2 + \alpha g \kappa \tau \quad (28)$$

$$\rho I \left(\frac{dA}{dt} + BC\right) = EI \frac{\partial \kappa \sqrt{g}}{\partial \sigma} + \sqrt{g} Q_1 - \alpha g \eta \tau \quad (29)$$

となる。ただし  $\alpha = GJ - EI$  とおいた。また、ここでせん断力  $Q_1, Q_2$  は構成方程式から決めるのではなく力のバランスより決められるので、慣性項を無視して

$$Q_1 = -EI \frac{\partial \kappa \sqrt{g}}{\partial s} + \alpha \sqrt{g} \eta \tau \quad (30)$$

$$Q_2 = EI \frac{\partial \eta \sqrt{g}}{\partial s} + \alpha \sqrt{g} \kappa \tau \quad (31)$$

を得る。ここで、 $C$  はねじれに関係した補助変数の役割を果たしていることが分かる。以上より最終的に 8 変数  $G, \kappa, \eta, \tau, U, W, V, C$  に対して (16), (20), (21), (22), (24), (25), (26) 及び (27) の 8 つの方程式を得た。これがソリトン理論と弾性論が融合した新しい基礎方程式である。

#### 4. 1次元弾性体の離散モデルについて

本節では特殊コッセラー理論に従う 1 次元物質の離散モデルを構築する。近年、計算機の発達に伴って複雑な対象を正確に表す計算モデルの必要性が高まっている。そこで、連続の弾性体をバネとマスによって離散近似し、かつ連続極限で特殊コッセラー理論に帰着するようなものを考える。それは以下のように与えられる [6][7]。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_n}{dt^2} = \mathbf{N}_n - \mathbf{N}_{n-1} - \mathbf{Q}_n + \mathbf{Q}_{n-1} \equiv \mathbf{F}_n \quad (32)$$

ここで、 $m$  はマスの質量、 $\mathbf{r}_n$  は空間における位置ベクトル、 $\mathbf{N}_n$  と  $\mathbf{Q}_n$  はマス間バネにおける軸力とせん断力を表す (図 1)。そして構成方程式は

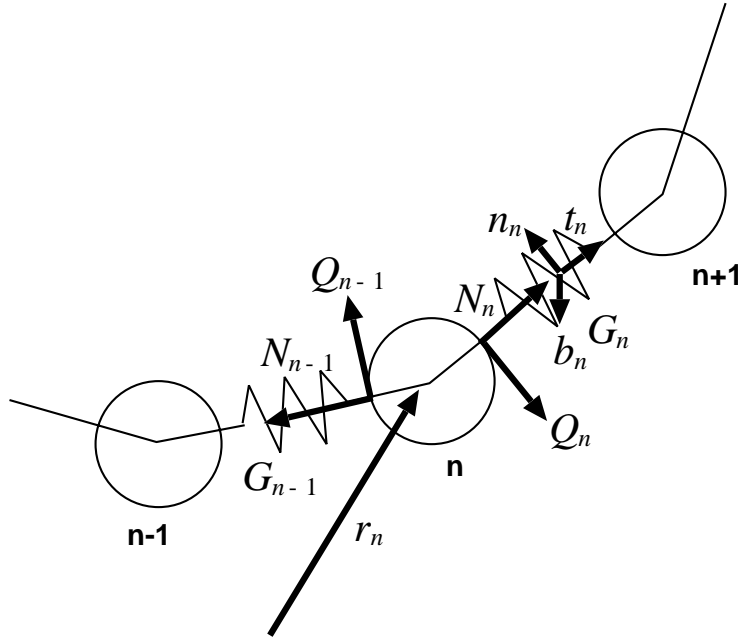


図 1: 1次元弾性体の離散モデル

$$\mathbf{N}_n = k \frac{|\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n| - l}{l} \mathbf{t}_n \equiv k \frac{G_n - l}{l} \mathbf{t}_n, \quad (33)$$

$$\mathbf{Q}_n = \frac{\mathbf{M}_{n+1}^l - \mathbf{M}_n^r + \mathbf{R}_n}{G_n} \quad (34)$$

で与える。ここで、

$$\mathbf{M}_n^r = \frac{K}{l} \frac{\alpha_n}{\sin \alpha_n} (-\mathbf{t}_{n-1} + \cos \alpha_n \mathbf{t}_n), \quad (35)$$

$$\mathbf{M}_n^l = \frac{K}{l} \frac{\alpha_n}{\sin \alpha_n} (\mathbf{t}_n - \cos \alpha_n \mathbf{t}_{n-1}), \quad (36)$$

$$\mathbf{R}_n = \boldsymbol{\Omega}_n \times \mathbf{t}_n, \quad (37)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_n = \frac{h}{l} (\Delta \psi_{n+1} \mathbf{t}_{n+1} - \Delta \psi_n \mathbf{t}_n) \quad (38)$$

である。ただし、 $M_n^r$  と  $M_n^l$  はそれぞれ右と左から作用する曲げモーメントである (図 2)。 $\Omega_n$  は

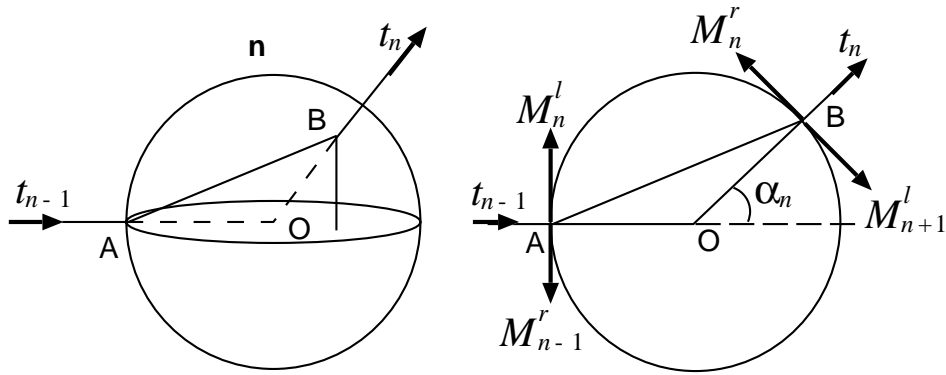


図 2: 離散モデルにおける曲げモーメント

ねじりを表すベクトルで (図 3)、 $\mathbf{R}_n$  はねじれから来るせん断力を表す。これらの式において、 $k$  は軸バネのバネ定数、 $K$  は曲げバネのバネ定数、 $l$  は軸バネの自然長である。 $\alpha_n$ 、 $\Delta\phi_n$  などは相対オイラー角を表しており、

$$E_n \begin{pmatrix} \mathbf{t}_n \\ \mathbf{n}_n \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P1_{n+1} & P2_{n+1} & P3_{n+1} \\ P4_{n+1} & P5_{n+1} & P6_{n+1} \\ P7_{n+1} & P8_{n+1} & P9_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_n \\ \mathbf{n}_n \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \quad (39)$$

で定義される。ここで、 $E_n$  は  $E_n f(n) = f(n+1)$  で定義されるシフト演算子である。 $Pi_n$  ( $n = 1, \dots, 9$ ) は相対オイラー角  $\Delta\psi_n$ 、 $\Delta\theta_n$  及び  $\Delta\phi_n$  を使って以下のように表される。

$$\begin{aligned} P1_n &= \cos \Delta\phi_n \cos \Delta\theta_n \equiv \cos \alpha_n, \\ P2_n &= \cos \Delta\theta_n \sin \Delta\phi_n, \\ P3_n &= -\sin \Delta\theta_n, \\ P4_n &= -\cos \Delta\psi_n \sin \Delta\phi_n + \cos \Delta\phi_n \sin \Delta\psi_n \sin \Delta\theta_n, \\ P5_n &= \cos \Delta\phi_n \cos \Delta\psi_n + \sin \Delta\phi_n \sin \Delta\psi_n \sin \Delta\theta_n, \\ P6_n &= \cos \Delta\theta_n \sin \Delta\psi_n, \\ P7_n &= \sin \Delta\phi_n \sin \Delta\psi_n + \cos \Delta\phi_n \cos \Delta\psi_n \sin \Delta\theta_n, \\ P8_n &= -\cos \Delta\phi_n \sin \Delta\psi_n + \cos \Delta\psi_n \sin \Delta\phi_n \sin \Delta\theta_n, \\ P9_n &= \cos \Delta\psi_n \cos \Delta\theta_n \end{aligned} \quad (40)$$

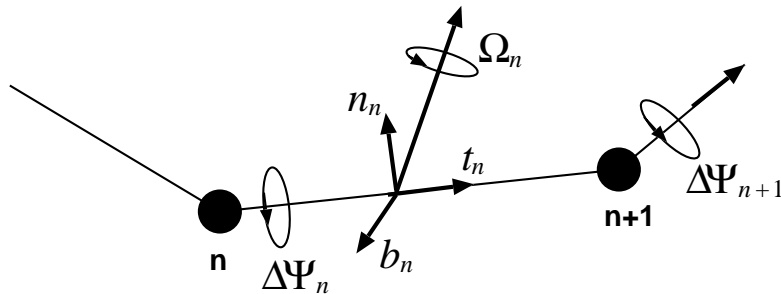


図 3: 離散モデルにおけるねじりの発生

式 (39) は離散化されたフレネーセレ方程式を表している。実際、(39) を  $G_n$  で割り、極限  $G_n \rightarrow 0$  をとると、公式  $G_n/l \rightarrow \sqrt{g}$  が成り立つことに注意して

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \lim_{G_n \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta\phi_n}{G_n} & -\frac{\Delta\theta_n}{G_n} \\ -\frac{\Delta\phi_n}{G_n} & 0 & \frac{\Delta\psi_n}{G_n} \\ \frac{\Delta\theta_n}{G_n} & -\frac{\Delta\psi_n}{G_n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (41)$$

を得る。そして、連続の場合のオイラー角を  $\kappa, \eta, \tau$  との関係は

$$\begin{aligned} \kappa &= \lim_{G_n \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi_n}{G_n}, \\ \eta &= \lim_{G_n \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta_n}{G_n}, \\ \tau &= \lim_{G_n \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi_n}{G_n} \end{aligned}$$

である。

次に (33) の極限は

$$\mathbf{N} = k(\sqrt{g} - 1)\mathbf{t} \quad (42)$$

となる。これが連続理論と整合するには  $k = EZ$  と選べば良いことが分かる。(34) についてはまず、

$$\begin{aligned} \lim_{G_n \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}_{n+1}^l - \mathbf{M}_n^r}{G_n} &= \lim_{G_n \rightarrow 0} K \left( \frac{\Delta\phi_n - \Delta\phi_{n-1} + \Delta\psi_{n-1}\Delta\theta_{n-1}}{lG_n} \mathbf{n}_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{-\Delta\theta_n + \Delta\theta_{n-1} + \Delta\psi_{n-1}\Delta\phi_{n-1}}{lG_n} \mathbf{b}_n \right), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\lim_{G_n \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_n}{G_n} = \lim_{G_n \rightarrow 0} \frac{h}{lG_n} \Delta\psi_{n+1} (-\Delta\theta_n \mathbf{n}_n - \Delta\phi_n \mathbf{b}_n) \quad (44)$$

とし、これら (43) と (44) より、最終的に

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \left( K \frac{\partial \kappa \sqrt{g}}{\partial s} + (K - h) \sqrt{g} \tau \eta \right) \mathbf{n} + \left( -K \frac{\partial \eta \sqrt{g}}{\partial s} + (K - h) \sqrt{g} \tau \kappa \right) \mathbf{b} \\ &= -Q_1 \mathbf{n} - Q_2 \mathbf{b} \end{aligned} \quad (45)$$

を得る。従って連続極限でコッセラー理論と一致するためには  $K = EI$  および  $h = GJ$  と選べば良いことが分かる。そして、 $m = \rho l$  とおき、(32) を  $l$  で割って

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\mathbf{N}_n - \mathbf{N}_{n-1} - \mathbf{Q}_n + \mathbf{Q}_{n-1}}{l} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \sigma} \quad (46)$$

より、(32) は連続極限でコッセラー理論になることが分かる。

最後にねじれに関しては、 $\mathbf{t}_n$  軸周りの回転のみを考慮すれば良く、

$$\rho I (\mathbf{n}_n \times \frac{d^2 \mathbf{n}_n}{dt^2} + \mathbf{b}_n \times \frac{d^2 \mathbf{b}_n}{dt^2})_{\mathbf{t}_n} = \left( \frac{\Omega_n}{l} \right)_{\mathbf{t}_n} \quad (47)$$

となる (図 1.3)。そして、

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left( \frac{\Omega_n}{l} \right)_{\mathbf{t}_n} = h \frac{\partial \tau \sqrt{g}}{\partial \sigma} \quad (48)$$

なので、極限で (47) は連続の理論に一致することが示せる。

## 5. ソリトン理論と弾性論 (離散版)

この節では離散ソリトン理論を用いた離散弾性体の解析について考えてゆく。いわば 3 節の離散版を構築する [8][7]。まず、離散曲線のダイナミクスを

$$\frac{d\mathbf{r}_n}{dt} = U_n \mathbf{t}_n + W_n \mathbf{n}_n + V_n \mathbf{b}_n, \quad (49)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_n \\ \mathbf{n}_n \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_n & B_n \\ -A_n & 0 & C_n \\ -B_n & -C_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_n \\ \mathbf{n}_n \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \quad (50)$$

とおく。次に関係式

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + G_n \mathbf{t}_n \quad (51)$$

を  $t$  で微分し、(39)、(49) や (50) を用いると、

$$\frac{dG_n}{dt} = -U_n + P1_{n+1}U_{n+1} + P4_{n+1}W_{n+1} + P7_{n+1}V_{n+1}, \quad (52)$$

$$A_n = \frac{1}{G_n}(-W_n + P2_{n+1}U_{n+1} + P5_{n+1}W_{n+1} + P8_{n+1}V_{n+1}), \quad (53)$$

$$B_n = \frac{1}{G_n}(-V_n + P3_{n+1}U_{n+1} + P6_{n+1}W_{n+1} + P9_{n+1}V_{n+1}) \quad (54)$$

を得る。

(39) と (50) との両立条件により、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P1_{n+1} & P2_{n+1} & P3_{n+1} \\ P4_{n+1} & P5_{n+1} & P6_{n+1} \\ P7_{n+1} & P8_{n+1} & P9_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_n \\ \mathbf{n}_n \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} 0 & A_n & B_n \\ -A_n & 0 & C_n \\ -B_n & -C_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_n \\ \mathbf{n}_n \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \quad (55)$$

となるので、これよりオイラー角の時間発展として

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\phi_n}{dt} &= -A_{n-1} + A_n \frac{\cos \Delta\psi_n}{\cos \Delta\theta_n} - B_n \frac{\sin \Delta\psi_n}{\cos \Delta\theta_n} + B_{n-1} \sin \Delta\phi_n \tan \Delta\theta_n \\ &\quad - C_{n-1} \tan \Delta\theta_n \cos \Delta\phi_n, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\frac{d\Delta\theta_n}{dt} = B_{n-1} \cos \Delta\phi_n - B_n \cos \Delta\psi_n + C_{n-1} \sin \Delta\phi_n - A_n \sin \Delta\psi_n, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\psi_n}{dt} &= C_n - C_{n-1} \frac{\cos \Delta\phi_n}{\cos \Delta\theta_n} + B_{n-1} \frac{\sin \Delta\phi_n}{\cos \Delta\theta_n} - B_n \sin \Delta\psi_n \tan \Delta\theta_n \\ &\quad + A_n \tan \Delta\theta_n \cos \Delta\psi_n \end{aligned} \quad (58)$$

を得る。これらは特別な場合に離散化されたソリトン方程式に対応しており、たくさんの可積分方程式が含まれている。そして物理的にも重要な場合として、ループの伝播や螺旋状の波動などは全てソリトンの厳密解に対応していることが示せる。

次に (38) と (50) とを (47) に代入することにより、 $C_n$  に関する時間発展

$$\frac{dC_n}{dt} = \frac{h}{2\rho l^2} (\Delta\psi_{n+1} \cos \Delta\phi_{n+1} \cos \Delta\theta_{n+1} - \Delta\psi_n) \quad (59)$$

を得る。最後に (49) を時間で微分し

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}_n}{dt^2} &= \left( \frac{dU_n}{dt} - A_n W_n - B_n V_n \right) \mathbf{t}_n + \left( \frac{dW_n}{dt} + A_n U_n - C_n V_n \right) \mathbf{n}_n \\ &\quad + \left( \frac{dV_n}{dt} + B_n U_n + C_n W_n \right) \mathbf{b}_n \end{aligned} \quad (60)$$

を得るが、(60) と (32) の係数を比較して速度成分に対する発展方程式

$$\frac{dU_n}{dt} = A_n W_n + B_n V_n + \frac{(\mathbf{F}_n)_t n}{m}, \quad (61)$$

$$\frac{dW_n}{dt} = -A_n U_n + C_n V_n + \frac{(\mathbf{F}_n)_n n}{m}, \quad (62)$$

$$\frac{dV_n}{dt} = -B_n U_n - C_n W_n + \frac{(\mathbf{F}_n)_b n}{m} \quad (63)$$

を得る。以上、(52)、(56)、(57)、(58)、(59)、(61)、(62) そして (63) の 8 つの方程式に対して、変数は  $G_n$ 、 $\Delta\phi$ 、 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\psi$ 、 $C_n$ 、 $U_n$ 、 $W_n$  及び  $V_n$  の 8 つである。これらが離散化された 1 次元弾性体の新しい基礎方程式になる。

## 5. ソリトン方程式

以上で連続と離散の両方について基礎式が得られたが、そのうち曲率を記述する 3 つの非線形方程式はそれぞれ特別な場合にソリトン方程式になり、厳密な解析が可能になる。その具体例をいくつか列挙しよう。

まず、連続版について、(20), (21), (22) を考える。速度成分や曲率を

$$U = \frac{1}{2}\kappa^2, \quad W = \kappa_s, \quad V = 0, \quad \eta = \tau = 0 \quad (64)$$

とおくと、運動は 2 次元平面内になり曲率を記述する方程式は

$$\kappa_t = \kappa_{sss} + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_s \quad (65)$$

となる。これは変形 KdV 方程式といわれるソリトン方程式である。次に

$$\begin{aligned} U &= -\kappa^2 - \eta^2, \quad W = -2(\kappa_s + \tau\eta) \\ V &= 2(\eta_s - \tau\kappa) \end{aligned} \quad (66)$$

とおき、橋本変換

$$\psi = (\kappa - i\eta) \exp(i \int \tau ds) \quad (67)$$

を通して新しい変数  $\psi$  を導入すると

$$\psi_t + 3|\psi|^2\psi_s + 2\psi_{sss} = 0 \quad (68)$$

が得られる。これは複素変形 KdV 方程式といわれる。また、速度成分を

$$U = 0, \quad W = \eta, \quad V = \kappa \quad (69)$$

とおくと、橋本変換により曲率に対する方程式は

$$\psi_t + \psi_{ss} + \frac{1}{2}|\psi|^2\psi = 0 \quad (70)$$

となる。これは非線形シュレディンガー方程式である。

離散版については一般に式が繁雑になるが、

$$\frac{1}{G_n} \tan \frac{\Delta\phi_n}{2} \equiv q_n \quad (71)$$

として新しい変数を導入し、

$$U_n = 2q_n q_{n-1} \quad (72)$$

$$W_n = \frac{q_n - q_{n-2}}{G_{n-1}} - G_{n-1} q_{n-1}^2 (q_n + q_{n-2}) \quad (73)$$

$$V_n = 0 \quad (74)$$

とおくと、(56)、(57)、(58) より、

$$2G^3 \frac{dq_n}{dt} = (1 + G^2 q_n^2) ((1 + G^2 q_{n+1}^2) q_{n+2} - (1 + G^2 q_{n-1}^2) q_{n-2} + G^2 (q_{n+1}^2 - q_{n-1}^2) q_n - 2(q_{n+1} - q_{n-1})) \quad (75)$$

を得る。これは離散版の変形 KdV 方程式であり、厳密に解ける非線形差分方程式である。

それでは、これらのソリトン方程式の解は全て 8 つの基礎式を満たすのか、という問題を考えてみよう。実はこれは否定的であり、ある制限されたクラスの解のみが弾性論の基礎式を満たすことが分かる。それは、伝播解と見なすことの出来るクラスで、いわば 1 ソリトン解や 2 ソリトン解の特殊な場合に相当する。その例として、(65) の 1 ソリトン解は

$$\kappa = 2a \operatorname{sech}(a(s + a^2)t) \quad (76)$$

であり、曲げ剛性が弱いとするとこの解は

$$a^4 = \frac{EA}{\rho} (1 + \varepsilon) \varepsilon \quad (77)$$

という条件で弾性論の厳密解になっていることが示せる。ただし、 $\sqrt{g} = 1 + \varepsilon$  であり、 $\varepsilon$  は定数である。これはループが紐を伝わる運動を表す。同様に離散版の時には (75) のソリトン解は

$$q_n = \frac{p^2 - 1}{2Gp} \operatorname{sech}(\log p n + \frac{(p^2 - 1)(p - 1)^2}{2G^3 p^2} t) \quad (78)$$

であり、これも

$$\frac{(p - 1)^4}{p^2 G^4} = \frac{EA}{\rho} \varepsilon (1 + \varepsilon) \quad (79)$$

の条件のときに弾性論としての厳密解になる。ただし、 $p = \exp(aG)$  であり、 $G_n = l(1 + \varepsilon) \equiv G$  とおいた。その他の例は複素変形 KdV 方程式の 0 ソリトン解で

$$\psi(s, t) = \kappa_f \exp(is \sqrt{\kappa_f^2/2 + v/2} + i(2\kappa_f^2 - v)t) \quad (80)$$

のように与えられる。これは曲率で書けば

$$\kappa = \kappa_f \cos c(s + vt) \quad (81)$$

$$\eta = \kappa_f \sin c(s + vt) \quad (82)$$

となる。ただし、 $c = \tau - \sqrt{\kappa_f^2/2 + v/2}$  であり、 $\tau$  や  $\kappa_f$  は定数である。この解も、

$$v = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho} \sqrt{g}(\sqrt{g} - 1)} \quad (83)$$

$$EIc + (GJ - EI)\tau = 0 \quad (84)$$

という条件のときに弾性論を満たすことが分かる。これは螺旋波が紐を伝わる運動を表している。

## 6. 数値計算スキームとその計算例

さて、4 節で得られた離散版の基礎式は、連続極限でコッセラー理論に一致することが示されているので弾性紐の良い数値計算モデルになっていることが分かる。空間は既に差分化されており、しかもそれは物理的な意味のはっきりした差分化である。時間部分は陽解法で容易に計算できルンゲクッタ法や BS 法など高精度スキームがそのまま利用できる。もう一度基礎式をまとめておこう。

$$\frac{dG_n}{dt} = -U_n + P_{1_{n+1}} U_{n+1} + P_{4_{n+1}} W_{n+1} + P_{7_{n+1}} V_{n+1} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\phi_n}{dt} = & -A_{n-1} + A_n \frac{\cos \Delta\psi_n}{\cos \Delta\theta_n} - B_n \frac{\sin \Delta\psi_n}{\cos \Delta\theta_n} \\ & + B_{n-1} \sin \Delta\phi_n \tan \Delta\theta_n - C_{n-1} \tan \Delta\theta_n \cos \Delta\phi_n \end{aligned} \quad (86)$$

$$\frac{d\Delta\theta_n}{dt} = B_{n-1} \cos \Delta\phi_n - B_n \cos \Delta\psi_n + C_{n-1} \sin \Delta\phi_n - A_n \sin \Delta\psi_n \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\psi_n}{dt} = & C_n - C_{n-1} \frac{\cos \Delta\phi_n}{\cos \Delta\theta_n} + B_{n-1} \frac{\sin \Delta\phi_n}{\cos \Delta\theta_n} \\ & - B_n \sin \Delta\psi_n \tan \Delta\theta_n + A_n \tan \Delta\theta_n \cos \Delta\psi_n \end{aligned} \quad (88)$$

$$\frac{dC_n}{dt} = \frac{h}{2\rho l} (\Delta\psi_{n+1} \cos \Delta\phi_{n+1} \cos \Delta\theta_{n+1} - \Delta\psi_n) \quad (89)$$

$$\frac{dU_n}{dt} = A_n W_n + B_n V_n + \frac{(\mathbf{F}_n)_t n}{m} \quad (90)$$

$$\frac{dW_n}{dt} = -A_n U_n + C_n V_n + \frac{(\mathbf{F}_n)_n n}{m} \quad (91)$$

$$\frac{dV_n}{dt} = -B_n U_n - C_n W_n + \frac{(\mathbf{F}_n)_b n}{m} \quad (92)$$

以下にこの8つの基礎式を用いた計算例をいくつか載せる。図4は螺旋状の変形運動を表しており、これは前節の複素変形 KdV 方程式の解に対応している。厳密解なので適当な初期境界条件を設定すればこのまま形を崩さずに伝播してゆく。また、図5も前節で議論した変形 KdV 方程式

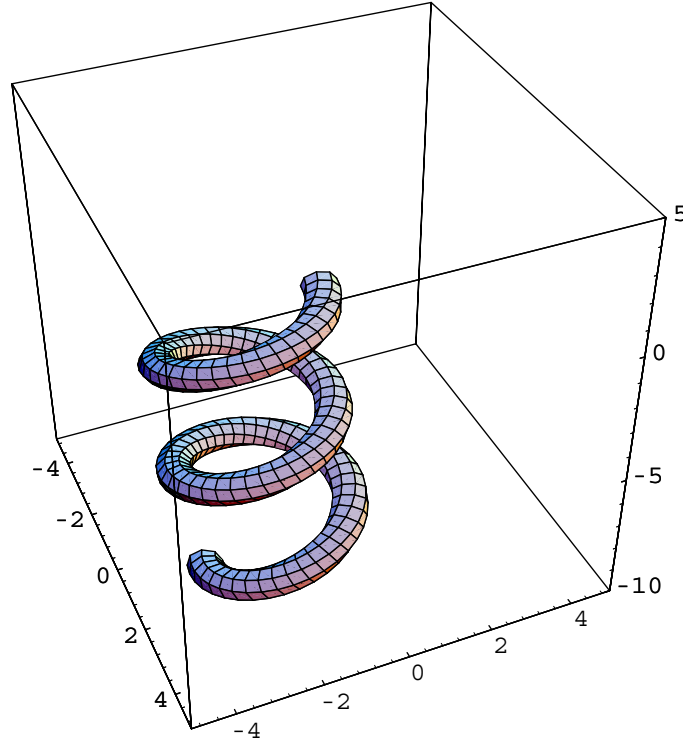


図4: 複素変形 KdV 方程式の解の例

のループ解の伝播である。このように縦波の擾乱を加えてもループは安定であることが分かる。

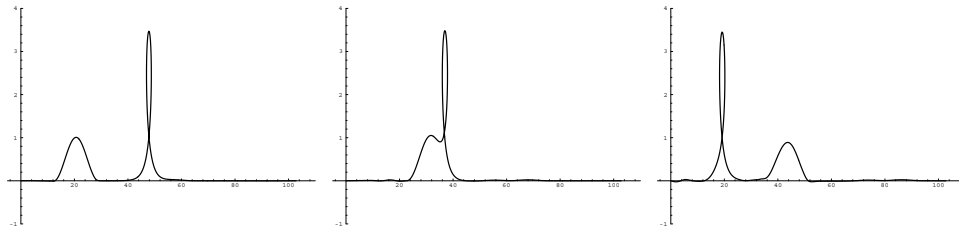


図 5: 変形 KdV 方程式のループ解と擾乱波の衝突

## 参考文献

- [1] Antman, S. S., 1995, *Nonlinear problems of elasticity* Springer, New York.
- [2] Coleman, B. D. and Dill, E. H., 1992, "Flexure waves in elastic rods," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 91 pp. 2663-2673.
- [3] Katsuhiko Nishinari, "Nonlinear Dynamics of Solitary Waves in an Extensible Rod", Proc. R. Soc. Lond. A., Vol.453 (1997) pp.817-833.
- [4] Goldstein, R.E. and Petrich, D.M., 1991, "The Korteweg-de Vries Hierarchy as Dynamics of Closed Curves in the Plane," *Physical Review Letters*, Vol. 67, pp. 3203-3206.
- [5] Nakayama, K., Segur, H. and Wadati, M., 1992, "Integrability and the Motion of Curves," *Physical Review Letters*, Vol. 69, pp. 2603-2606.
- [6] Katsuhiko Nishinari, "Discrete modeling of a string and analysis of a loop soliton", ASME J. Appl.Mech., vol.65 (1998) pp.737-747.
- [7] Katsuhiko Nishinari, "A Discrete Model of an Extensible String in Three-dimensional Space", ASME J. Appl.Mech., vol.66 (1999) pp.695-701.
- [8] Doliwa, A. and Santini, P.M., 1994, "An elementary geometric characterization of the integrable motions of a curve," *Physics Letters A*, Vol. 185 pp. 373-384.