

## 3ファクターラティスモデルによる2カ国の金利の確率的変動を考慮した派生商品の評価

●  
コンサルタント  
高橋 明彦

●  
メリルリンチ証券会社東京支店\*  
時岡 毅実

### 要 約

我々は、2カ国の金利及び為替レートを複合的に原資産とするアメリカンスタイルの派生商品を評価するための簡易で計算効率の高い3ファクターラティスモデルを開発した。

今回の我々のモデルでは、金利プロセスとしてHull/White [1990] の拡張 Vasicek タイプの瞬間短期金利プロセス、為替レートには対数正規プロセスを使用し、これらの連続プロセスを2項モデルにより離散近似し、初期時点の金利の期間構造及び相関係数を再現するような経路独立型のラティスを構築した。2項モデルの採用により、偏微分方程式の数値解法等と比べ直感的に理解し易くなっており、PC等を用いて容易に実用化できる。さらに、初期時点における金利の期間構造を表現する項と将来の変動を表わす項とを分離することによって、金利の変化に対する価格の再評価やデルタ等のリスク計算を行う上での計算効率を向上させた。このモデルを用いることにより、長期の通貨オプション、通貨スワップション、キャップ付きディファレンシャルスワップ、クオントオプション等の複合的派生商品をアメリカンスタイルを含めて評価することができる。数値例として、長期の通貨オプションを評価し、高速に実務上十分な精度が得られることを確認した。

\*本論文中の「6. 数値例」の作成に必要なプログラミングに関しては、小林貴幸氏（日本興業銀行）の多大なるご助力を頂いた。ここに感謝の意を表したい。もちろん、ありうるすべての誤りは筆者の責任である。

\*本論文は、筆者が所属するメリルリンチ証券会社とは無関係に作成されたものであり、本論文に関する一切の責任は、筆者個人のものに属するものである。

## 1. はじめに

2カ国の金利及び為替レートを複合的に原資産とする派生商品进行评估するためには、外国及び自国の金利と為替レートの3つの変動要素を同時にモデル化する必要が生じる。このような複数ファクターモデルの場合、解析的な解を導出できるケースが極めて希となるため、数値的な評価手法が重要となる。

現在金融機関で派生商品进行评估するために用いられている代表的な数値解法としては、モンテカルロ法とラティス法の2つの手法が挙げられる。モンテカルロ法はインプリメンテーションが容易であり且つ柔軟性が非常に高く様々な商品条件を容易に組み込めるため、有効な手法と言える。ところがモンテカルロ法は、①計算効率が悪いこと、及び②アメリカンスタイルの派生商品の評価が困難なこと、といった問題があるため、これだけでは不十分である。ラティス法は、経路依存型の派生商品の評価が困難なこと、取り扱う各確率変数が多くなると計算効率が大幅に落ちること、といった問題点があるものの、先のモンテカルロ法の欠点を補う重要な手法である。実務では、解くべき問題の性質に応じてこれらの手法を使い分ける必要がある。

ラティスの構築方法は、経路独立型と経路依存型の2つに大別できる。経路独立型ラティスでは、確率変数のノード上の値が、上昇した直後に下降した場合と下降した直後に上昇した場合とで一致するので、時間分割数  $N$ 、取り扱う確率変数の数  $d$  に対してラティス上の状態数が  $(N+1)^d$  のオーダーで増加する。これに対して経路独立型でないラティスでは状態数が  $2^{Nd}$  の指数オーダーで増加するため、経路独立型のラティスは、取り扱う確率変数が3個であることを考慮すれば、経路依存型に比べ計算効率が圧倒的に高くなる。

これまで行われてきた2カ国の金利と為替レートの3変数を同時に取り扱うラティスモデルの研究成果としては、Amin/Bodurtha [1995] のモデルを挙げることができる。彼らのモデルは、離散時間の2国通貨の金利プロセスとしてそれぞれHeath/Jarrow/Morton [1992] の瞬間フォワードレートの連続時間プロセスをオイラー近似して使用しており、為替レートの離散時間プロセスとして両国の金利を所与としたときの対数正規プロセスをオイラー近似したものを利用している。彼らのモデルは経路依存型ラティスとして記述されており、瞬間フォワードレートのボラティリティが定数のときのみ経路独立型ラティスに帰着される。従って、平均回帰型モデル等のより複雑なモデルの場合には計算処理効率が大幅に低下する。

一方、Dempster/Hutton [1997] は、3状態変数偏微分方程式の数値解法を用いて、拡張Vasicekタイプの瞬間短期金利プロセス及び対数正規為替プロセスを前提に、コンプレックス・ディファレンシャル・スワップの評価を試みている。しかし、陰的解法はその計算のオーダーが1状態変数当たりのステップ数の8乗となる為実用的には不可能に近く、また陽的解法もその計算のオーダーが1状態変数当たりのステップ数の5乗になる為3次元経路独立型ラティスの4乗に比べるとその計算効率が低いばかりでなく、彼ら自身が認めているように正確な安定性条件が不明であるので結局実用には適さないように思われる。

また3次元ラティスではないが、Hull/White [1994] は2つの1次元金利ラティスを合成することによって2次元ラティスの構成を試みているが、彼らの手法では変数間の相

関係数を十分に再現することは難しい。

今回の我々のモデルでは、金利プロセスとしてHull/White [1990] の拡張Vasicekタイプの瞬間短期金利プロセス、為替レートにはAmin/Bodurtha [1995] と同様の対数正規プロセスを使用し、これらの連続プロセスを2項モデルにより離散近似し、初期時点の金利の期間構造及び相関係数を再現するような経路独立型のラティスを構築した。2項モデルの採用により、偏微分方程式の数値解法等と比べ直感的に理解し易くなっており、PC等を用いて容易に実用化できる。さらに、初期時点における金利の期間構造を表現する項と将来の変動を表わす項とを分離することによって、金利の変化に対する価格の再評価やデルタ等のリスク計算を行う上での計算効率を向上させた。このモデルを用いることにより、長期の通貨オプション、通貨スワップオプション、キャップ付きディファレンシャルスワップ、クオントオプション等の複合的派生商品をアメリカンスタイルを含めて評価することが可能となる。尚、数値例として長期の通貨オプションを評価し、高速に実務上十分な精度が得られることを確認した。

以降での本論文の構成は次のとおりである。第2節では、金利と為替の両方が確率的に変動する連続時間モデルについて概説する。第3節では、効率的なラティスを構築することを目的に、連続時間モデルの離散時間近似式を与える。第4節では、金利と為替に関する具体的なラティス構築方法を示す。第5節では、ラティスを用いて派生商品进行评估する方法を示し、この方法が適用できる具体的な派生商品を例示する。第6節では、長期の通貨オプションを例にとり、我々のラティスを用いた評価値の精度を検定する。第7節では本論文を総括する。

## 2. 連続時間理論モデル

まず、時間に関して連続的な世界を考える。この世界には自国と外国の2種類の通貨が存在し、この通貨間の為替取引と各国通貨建ての任意の満期の割引債が制約なしで取引でき、裁定機会は常に存在しないことを仮定する。また、各国通貨の金利はそれぞれ拡張Vasicekモデル (Hull/White [1990]) に従うことを仮定し、為替レートは両国の金利を所与のものとした時に対数正規過程に従うことを仮定する。このとき、Harrison/Pliska [1981] 等の同値マルチンゲール測度に関する議論より、自国通貨の同値マルチンゲール測度の下における外国通貨瞬間短期金利  $r_f(t)$ 、自国通貨瞬間短期金利  $r_d(t)$ 、及び為替レート  $S(t)$  の連続確率過程は以下のように表わされる<sup>1</sup>。

$$dr_f(t) = \left( \theta_f(t) - \rho_{sf}\sigma_s\sigma_f - \frac{k_f}{2}r_f(t) \right) dt + \sigma_f d\omega_f \quad (1)$$

$$dr_d(t) = \left( \theta_d(t) - \frac{k_d}{2}r_d(t) \right) dt + \sigma_d(\rho_{df}d\omega_f + \sqrt{1-\rho_{df}^2}d\omega_d) \quad (2)$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r_d(t) - r_f(t)) dt + \sigma_s(\rho_{fs}d\omega_f + \beta d\omega_d + \sqrt{1-\rho_{fs}^2 - \beta^2}d\omega_s) \quad (3)$$

但し、

$$\beta = \frac{\rho_{ds} - \rho_{df}\rho_{fs}}{\sqrt{1-\rho_{df}^2}}$$

であり、 $\omega_f$ 、 $\omega_d$ 、 $\omega_s$  は互いに独立な標準ブラウン運動を表わし、 $\sigma_f$ 、 $\sigma_d$ 、 $\sigma_s$  はそれぞれ  $dr_f$ 、 $dr_d$ 、 $dS$  のボラティリティパラメータ、 $k_f$ 、 $k_d$  はそれぞれ  $dr_f$ 、 $dr_d$  の平均回帰パラメータ、 $\rho_{fs}$ 、 $\rho_{df}$ 、 $\rho_{sd}$  はそれぞれ  $dr_f$  と  $dS$ 、 $dr_d$  と  $dr_f$ 、 $dS$  と  $dr_d$  の間の相関係数パラ

メータを表わす。なお  $\theta_f(t)$ ,  $\theta_a(t)$  は、後に詳述するが、それぞれ外国及び自国の金利の初期時点の期間構造に適合するように決定される時間に関する確定関数である。

次に、ラティス構築上便利なように、外国及び自国通貨の金利及び為替レートに関する上記 (1)～(3) の確率過程を初期時点の金利の期間構造とは独立な確率過程とその他確定項とに分離して記述する。具体的には、外国通貨の金利に関する確率過程 (1) 式を積分して整理し、以下のように書き直す。

$$r_f(t) = \phi_f(t) - \rho_{sf}\sigma_s\sigma_f\left(\frac{2}{k_f}\right)\left(1 - \exp\left\{-\frac{k_f}{2}t\right\}\right) + X_f(t) \quad (4)$$

但し、

$$\begin{aligned} \phi_f(t) &= \exp\left\{-\frac{k_f}{2}t\right\}r_f(0) + \exp\left\{-\frac{k_f}{2}t\right\}^{-\frac{k_f}{2}t} \int_0^t \exp\left\{-\frac{k_f}{2}s\right\}\theta_f(s) ds \\ dX_f(t) &= -\frac{k_f}{2}X_f(t) dt + \sigma_f d\omega_f \quad : X_f(0) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

自国通貨の金利の確率過程 (2) 式についても同様に

$$r_a(t) = \phi_a(t) + X_a(t) \quad (6)$$

但し、

$$\begin{aligned} \phi_a(t) &= \exp\left\{-\frac{k_a}{2}t\right\}r_a(0) + \exp\left\{-\frac{k_a}{2}t\right\} \int_0^t \exp\left\{-\frac{k_a}{2}s\right\}\theta_a(s) ds \\ dX_a(t) &= -\frac{k_a}{2}X_a(t) dt + \sigma_a(\rho_{af}d\omega_f + \sqrt{1 - \rho_{af}^2}d\omega_a) \quad : X_a(0) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

と書き直せる。同様に為替レートの確率過程 (3) 式に関しても

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \int_0^t \phi_a(s) ds - \int_0^t \phi_f^*(s) ds - \frac{\sigma_s^2}{2}t + X_s(t) \quad (8)$$

但し、

$$\begin{aligned} \phi_f^*(t) &= \phi_f(t) - \rho_{sf}\sigma_s\sigma_f\left(\frac{2}{k_f}\right)\left(1 - \exp\left\{-\frac{k_f}{2}t\right\}\right) \\ dX_s(t) &= (X_a(t) - X_f(t)) dt + \sigma_s(\rho_{fs}d\omega_f + \beta d\omega_a + \sqrt{1 - \rho_{fs}^2 - \beta^2}d\omega_s) \\ & \quad : X_s(0) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

と書き直せる。尚、上記 (4), (6), (8) 式中の  $X_f(t)$ ,  $X_a(t)$ ,  $X_s(t)$  は、初期の金利期間構造とは独立に決まることが特徴的である。

### 3. 離散時間近似モデル

ここでは、前節 (5), (7), (9) 式の  $dX_f(t)$ ,  $dX_a(t)$ ,  $dX_s(t)$  の離散時間近似式を与える。満期時刻  $T$  までの期間を  $N$  個に均等分割して  $0, h = T/N, 2h, \dots, T$  と離散化したときの各時点  $ih$  ( $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ) における  $dX_f(ih)$ ,  $dX_a(ih)$ ,  $dX_s(ih)$  をそれぞれ次のように 2 項近似する。

$$X_f(i+1; j') - X_f(i; j) = \sigma_f\sqrt{h} Y_1 \quad : X_f(0) = 0 \quad (10)$$

$$X_a(i+1; j', k') - X_a(i; j, k) = \sigma_a\sqrt{h} (\rho_{af}Y_1 + \sqrt{1 - \rho_{af}^2}Y_2) \quad : X_a(0) = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} X_s(i+1; j', k', l') - X_s(i; j, k, l) &= \sigma_s\sqrt{h} (\rho_{fs}Y_1 + \beta Y_2 + \sqrt{1 - \rho_{fs}^2 - \beta^2}Y_3) \\ & \quad : X_s(0) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ここで  $j, k, l$  は時点  $ih$  における状態を表現しており、それぞれ  $0, 1, \dots, i$  の値を取り得る。また、 $j', k', l'$  は時点  $(i+1)h$  における状態を表現しており、それぞれ  $j+1$  又

は  $j, k+1$  又は  $k, l+1$  又は  $l$  のどちらかを取り得る.  $X_f(i; j), X_a(i; j, k), X_s(i; j, k, l)$  は, それぞれ時点  $ih$  での状態  $j, k, l$  における  $X_f(ih), X_a(ih), X_s(ih)$  の値を表わしている. 上記 (10)~(12) 式中における状態変数の差分を表わす  $Y_m, m=1, 2, 3$  は以下で定義される相互に独立な確率変数である.

$$Y_1 = \begin{cases} 1 & j'=j+1 \text{ のとき (確率 } p_1(i; j)) \\ -1 & j'=j \text{ のとき (確率 } 1-p_1(i; j)) \end{cases}$$

$$Y_2 = \begin{cases} 1 & k'=k+1 \text{ のとき (確率 } p_2(i; j; k)) \\ -1 & k'=k \text{ のとき (確率 } 1-p_2(i; j; k)) \end{cases}$$

$$Y_3 = \begin{cases} 1 & l'=l+1 \text{ のとき (確率 } p_3(i; j; k; l)) \\ -1 & l'=l \text{ のとき (確率 } 1-p_3(i; j; k; l)) \end{cases}$$

離散時間近似式 (10)~(12) が状態に依存しない形式で表現されているため,  $X_f(i; j), X_a(i; j, k), X_s(i; j, k, l)$  のラティスは経路独立型として構築され, 3ファクターモデルであることを考慮すれば, 経路依存型のラティスに比べて大幅に効率的な計算が可能となる.

$Y_m, m=1, 2, 3$  の状態推移確率  $p_1(i; j), p_2(i; j, k), p_3(i; j, k, l)$  は, (10), (11), (12) 式の右辺の条件付き期待値がそれぞれ (5), (7), (9) 式の右辺のドリフト項と等しくなるように決定する.

$$\begin{aligned} p_1(i; j) &= \text{Min}(1, \max[0, p_1^*(i; j)]), \\ p_2(i; j) &= \text{Min}(1, \max[0, p_2^*(i; j)]), \\ p_3(i; j) &= \text{Min}(1, \max[0, p_3^*(i; j)]). \end{aligned} \quad (13)$$

但し,

$$\begin{aligned} p_1^*(i; j) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_f \sqrt{h}}{2\sigma_f} X_f(i; j) \right), \\ p_2^*(i; j, k) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho_{af}(1-2p_1(i; j))}{\sqrt{1-\rho_{af}^2}} \right) - \frac{1}{2} \frac{k_a \sqrt{h}}{2\sigma_a \sqrt{1-\rho_{af}^2}} X_a(i; j, k), \\ p_3^*(i; j, k, l) &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho_{fs}(1-2p_1(i; j)) + \beta(1-2p_2(i; j, k))}{\sqrt{1-\rho_{fs}^2 - \beta^2}} \right) \\ &\quad + \frac{X_a(i; j, k) - X_f(i, j)}{2\sigma_s \sqrt{1-\rho_{fs}^2 - \beta^2}} \sqrt{h}. \end{aligned}$$

上記 (13) 式においては,  $p_1^*(i; j), p_2^*(i; j, k), p_3^*(i; j, k, l)$  の各値が常に  $[0, 1]$  の範囲に入ることが保証されていないため, パラメータ群の値によってそれらの値が  $[0, 1]$  の範囲を超える場合には,  $p_m^*, m=1, 2, 3$  が負になる場合は 0 に, 1 を超える場合は 1 にする調整を行っている. 尚,  $p_m^*, m=1, 2, 3$  が  $[0, 1]$  の範囲を超えるのは, 平均回帰パラメータ  $k_f, k_a$  の値が大きいときや相関係数パラメータ  $\rho_{fs}, \rho_{af}, \rho_{sa}$  の値が大きい場合に, ラティスの上端 ( $i$  時点における状態  $j, k, l$  の値が  $i$  の近くのノード) や下端 (状態  $j, k, l$  の値が 0 の近くのノード) で発生する. 但し, 平均回帰パラメータ  $k_f, k_a$  の値は通常小さく, また, 金利や為替レートに関する相関係数パラメータの値も小さい場合が殆どなので, 現実的なパラメータの値が設定される場合はこの状況は殆ど発生しない<sup>2</sup>. なお, 時間分割幅  $h$  を 0 に近づけるに従って  $[0, 1]$  の範囲を超えなくなるため, 時間間隔の細分化が可能であればどのようなパラメータが設定されてもこの問題は発生しなくなる.

## 4. ラティスの構築

先に指摘したように、 $X_f(i; j)$ ,  $X_a(i; j, k)$ ,  $X_s(i; j, k, l)$  のラティスは初期時点の金利の期間構造と独立に構築された。ここでは、このラティスをベースに、初期時点における金利の期間構造の情報を用いて、外国通貨の瞬間短期金利、本国通貨の瞬間短期金利、及び為替レートのラティスを構築していく方法を述べる。なお、初期時点の時点  $t$  を満期とする外国通貨の割引債価格を  $P_f(0, t)$ 、本国通貨の割引債価格を  $P_a(0, t)$  と書く。

### 4.1 外国通貨の瞬間短期金利に関するラティスの構築

外国通貨の瞬間短期金利は、(4) 式から、 $X_f(t)$  及び  $\phi_f(t)$  が与えられれば決まる。 $\phi_f(t)$  は外国通貨のアロー・デュブリュー証券価格と同時に、外国通貨のリスク中立測度の下で初期時点における外国通貨の金利の期間構造  $\{P_f(0, ih)\}_i$  を再現するように、以下に示すように時点  $t=0, h, \dots, Nh$  について手前から逐次的に求められる。なお、時点  $ih$ 、状態  $j$  でのみ 1 外国通貨単位のキャッシュフローが発生するアロー・デュブリュー証券の価格を  $Q_f(i; j)$  と書く。

まず、時点 0 において、

$$\phi_f(0) = r_f(0) \quad \text{及び} \quad Q_f(0; 0) = 1$$

は明らか。時点  $h$  以降における外国通貨のアロー・デュブリュー証券価格は、ラティスの端点処理による 3 つの場合分けに従い、次のように計算される。

① 時点  $ih$  までの  $j$  が  $1, \dots, i$  の何れかのとき

$$Q_f(i+1; j) = \exp[-\{X_f(i; j-1) + \phi_f(ih)\}h] Q_f(i; j-1) p_1(i; j-1) \\ + \exp[-\{X_f(i; j) + \phi_f(ih)\}h] Q_f(i; j) \{1 - p_1(i; j)\}$$

②  $j=0$  のとき

$$Q_f(i+1; j) = \exp[-\{X_f(i; j) + \phi_f(ih)\}h] Q_f(i; j) \{1 - p_1(i; j)\}$$

③  $j=i+1$  のとき

$$Q_f(i+1; j) = \exp[-\{X_f(i; j-1) + \phi_f(ih)\}h] Q_f(i; j-1) p_1(i; j-1).$$

また、時点  $h$  以降における  $\phi_f(t)$  は、状態に関係なく

$$\phi_f((i+1)h) =$$

$$\frac{1}{h} \left\{ \ln \left[ \sum_{j \in \{0, 1, \dots, (i+1)\}} Q_f(i+1; j) \exp\{-X_f(i+1; j)h\} \right] - \ln P_f(0; (i+2)h) \right\}$$

と計算される。一旦  $\phi_f(t)$  及び外国通貨のアロー・デュブリュー証券価格が計算されれば、「3. 離散時間近似モデル」で求めた  $X_f(i; j)$  を用いて、時点  $ih$ 、状態  $j$  における外国通貨の瞬間短期金利  $r_f(i; j)$  は

$$r_f(i; j) = \phi_f(ih) - \rho_{sr} \sigma_s \sigma_f \left( \frac{2}{k_f} \right) \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{k_f}{2} ih \right\} \right) + X_f(i; j)$$

と計算される。

### 4.2 本国通貨の瞬間短期金利及び為替レートに関するラティスの構築

$\phi_f(t)$  と同様に、 $\phi_a(t)$  は本国通貨のアロー・デュブリュー証券価格と同時に、本国通貨のリスク中立測度の下で初期時点における本国通貨の金利の期間構造  $\{P_a(0, ih)\}_i$  を

再現するように、時点  $t=0, h, \dots, Nh$  について手前から逐次的に求められる。なお、時点  $ih$ 、状態  $j, k$  でのみ 1 自国通貨単位のキャッシュフローが発生するアロー・デュブリユ証券の価格を  $Q_a(i; j, k)$  と書く。

明らかに初期値として、

$$\phi_a(0) = r_a(0) \quad \text{及び} \quad Q_a(0; 0, 0) = 1$$

である。時点  $h$  以降の自国通貨のアロー・デュブリユ証券価格は、ラティスの端点処理による 9 つの場合分けが存在し、次のように計算される。

①  $j=1, 2, \dots, i$  且つ  $k=1, 2, \dots, i$

$$\begin{aligned} Q_a(i+1; j, k) = & \exp[-\{X_a(i; j-1, k-1) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j-1, k-1) \\ & p_1(i; j-1) p_2(i; j-1, k-1) \\ & + \exp[-\{X_a(i; j, k-1) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j, k-1) \{1 - p_1(i; j)\} p_2(i; j, k-1) \\ & + \exp[-\{X_a(i; j-1, k) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j-1, k) p_1(i; j-1) \{1 - p_2(i; j-1, k)\} \\ & + \exp[-\{X_a(i; j, k) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j, k) \{1 - p_1(i; j)\} \{1 - p_2(i; j, k)\} \end{aligned}$$

②  $j=1, 2, \dots, i$  且つ  $k=0$

$$\begin{aligned} Q_a(i+1; j, k) = & \exp[-\{X_a(i; j-1, k) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j-1, k) p_1(i; j-1) \{1 - p_2(i; j-1, k)\} \\ & + \exp[-\{X_a(i; j, k) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j, k) \{1 - p_1(i; j)\} \{1 - p_2(i; j, k)\} \end{aligned}$$

③  $j=1, 2, \dots, i$  且つ  $k=i+1$  のとき

$$\begin{aligned} Q_a(i+1; j, k) = & \exp[-\{X_a(i; j-1, k-1) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j-1, k-1) \\ & p_1(i; j-1) \{1 - p_2(i; j-1, k-1)\} \\ & + \exp[-\{X_a(i; j, k-1) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j, k-1) \{1 - p_1(i; j)\} p_2(i; j, k-1) \end{aligned}$$

④  $j=0$  且つ  $k=1, 2, \dots, i$  のとき

$$\begin{aligned} Q_a(i+1; j, k) = & \exp[-\{X_a(i; j, k-1) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j, k-1) \{1 - p_1(i; j)\} p_2(i; j, k-1) \\ & + \exp[-\{X_a(i; j, k) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j, k) \{1 - p_1(i; j)\} \{1 - p_2(i; j, k)\} \end{aligned}$$

⑤  $j=i+1$  且つ  $k=1, 2, \dots, i$  のとき

$$\begin{aligned} Q_a(i+1; j, k) = & \exp[-\{X_a(i; j-1, k-1) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j-1, k-1) \\ & p_1(i; j-1) p_2(i; j-1, k-1) \\ & + \exp[-\{X_a(i; j-1, k) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j-1, k) p_1(i; j-1) \{1 - p_2(i; j-1, k)\} \end{aligned}$$

⑥  $j=0$  且つ  $k=0$  のとき

$$\begin{aligned} Q_a(i+1; j, k) = & \exp[-\{X_a(i; j, k) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j, k) \{1 - p_1(i; j)\} \{1 - p_2(i; j, k)\} \end{aligned}$$

⑦  $j=0$  且つ  $k=i+1$  のとき

$$\begin{aligned} Q_a(i+1; j, k) = & \exp[-\{X_a(i; j, k-1) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j, k-1) \{1 - p_1(i; j)\} p_2(i; j, k-1) \end{aligned}$$

⑧  $j=i+1$  且つ  $k=0$  のとき

$$\begin{aligned} Q_a(i+1; j, k) = & \exp[-\{X_a(i; j-1, k) + \phi_a(ih)\}h] Q_a(i; j-1, k) p_1(i; j-1) \{1 - p_2(i; j-1, k)\} \end{aligned}$$

⑨  $j=i+1$  且つ  $k=i+1$  のとき

$$Q_d(i+1; j, k) = \exp[-\{X_d(i; j-1, k-1) + \phi_d(ih)\}h] Q_d(i; j-1, k-1) p_1(i; j-1) \{1 - p_2(i; j-1, k-1)\}$$

また、時点  $h$  以降における  $\phi_d(t)$  は、状態に関係なく

$$\phi_d((i+1)h) = \frac{1}{h} \left\{ \ln \left[ \sum_{j' \in \{0, 1, \dots, (i+1)\}} \sum_{k' \in \{0, 1, \dots, (i+1)\}} Q_d(i+1; j', k') \exp(-X_d(i+1; j', k')h) \right] - \ln P_d(0; (i+2)h) \right\}$$

と計算される。外国通貨の瞬間短期金利と同様に、一旦  $\phi_d(t)$  及び自国通貨のアロー・デュブリュー証券価格が計算されれば、 $X_d(i; j, k)$  及び  $X_s(i; j, k, l)$  を用いて、時点  $ih$ 、状態  $j, k, l$  における自国通貨の瞬間短期金利  $r_d(i; j, k)$  及び為替レート  $S(i; j, k, l)$  はそれぞれ

$$r_d(i; j, k) = \phi_d(ih) + X_d(i; j, k)$$

$$\ln S(i; j, k, l) = \ln S(0) + \sum_{i=0}^i \phi_d(ih)h - \sum_{i=0}^i \phi_f^*(i'h)h - \frac{\sigma_s^2}{2} ih + X_s(i; j, k, l)$$

と計算される。

## 5. 派生商品の評価

### 5.1 評価方法

はじめに、満期時点  $T = Nh$ 、状態  $j, k, l$  におけるペイオフを  $g(N; j, k, l)$  とする経路独立型アメリカンスタイル派生商品の、時点  $t = ih$  での状態  $j, k, l$  における価値  $V(i; j, k, l)$  を評価する方法を一般的に示す。まず、満期における価値  $V(N; j, k, l)$  は定義より

$$V(N; j, k, l) = g(N; i, j, k)$$

と書ける。次に、満期より 1 時点前における価値  $V(N-1; j, k, l)$  を次のように計算する。

$$V(N-1; j, k, l) = \max \{g(N-1; i, j, k), \exp\{-r_d(N-1; j, k)h\} E^d[V(N; j', k', l') | N-1; j, k, l]\}$$

但し、 $E^d[\cdot | N-1; j, k, l]$  は  $(N-1)h$  時点の状態  $j, k, l$  における自国通貨の同値マルチンゲール測度の下での条件付期待値オペレーターで、具体的には次式のように表現される。

$$\begin{aligned} E^d[V(N; j', k', l') | N-1; j, k, l] = & V(N; j+1, k+1, l+1) p_1(N-1; j) p_2(N-1; j, k) p_3(N-1; j, k) \\ & + V(N; j+1, k+1, l) p_1(N-1; j) p_2(N-1; j, k) \{1 - p_3(N-1; j, k)\} \\ & + V(N; j+1, k, l+1) p_1(N-1; j) \{1 - p_2(N-1; j, k)\} p_3(N-1; j, k) \\ & + V(N; j, k+1, l+1) \{1 - p_1(N-1; j)\} p_2(N-1; j, k) p_3(N-1; j, k) \\ & + V(N; j+1, k, l) p_1(N-1; j) \{1 - p_2(N-1; j, k)\} \{1 - p_3(N-1; j, k)\} \\ & + V(N; j, k+1, l) \{1 - p_1(N-1; j)\} p_2(N-1; j, k) \{1 - p_3(N-1; j, k)\} \\ & + V(N; j, k, l+1) \{1 - p_1(N-1; j)\} \{1 - p_2(N-1; j, k)\} p_3(N-1; j, k) \\ & + V(N; j, k, l) \{1 - p_1(N-1; j)\} \{1 - p_2(N-1; j, k)\} \{1 - p_3(N-1; j, k)\}. \end{aligned}$$

以下、同様な計算を時点  $ih$  まで繰り返すことにより、 $V(i; j, k, l)$  が得られる。



## 5.2 商品例

以下では、上記の方法を用いて評価できる具体的な派生商品を4つ例示する。

### 5.2.1 通貨オプション

例えば、本国通貨コール外国通貨プットの通貨オプションの満期時点  $T$  におけるペイオフ  $g(T)$  は次のように表現される。

$$g(T) = \max [K - S(T), 0]$$

但し、

$K$ ；行使価格

$S(T)$ ；為替レート（本国通貨／外国通貨）

### 5.2.2 固定金利対固定金利通貨スワップオプション

例えば、本国通貨の固定金利を支払い、外国通貨の固定金利を受け取る通貨スワップのオプションの満期時点  $T$  におけるペイオフ  $g(T)$  は以下のように表現される。

$$g(T) = \max \left[ S(T) \sum_{i=1}^m K_{f,i} P_f(T, T_i) - \sum_{i=1}^m K_{d,i} P_d(T, T_i), 0 \right]$$

但し、

$K_{f,i}$ ；外国金利固定キャッシュフロー（外国金利）

$K_{d,i}$ ；本国金利固定キャッシュフロー（本国金利）

$T_i$ ；キャッシュフロー支払日

$S(T)$ ；為替レート（本国通貨／外国通貨）

$P_d(T, T_i)$ ；時点  $T$  における  $T_i$  満期の本国通貨の割引債価格

$P_f(T, T_i)$ ；時点  $T$  における  $T_i$  満期の外国通貨の割引債価格

### 5.2.3 キャップ付きディファレンシャルスワップ

例えば、キャップレート  $K$  を上限とする米ドルLiborレートを円で受け取り、円Liborレートを通常のスワップと同様に円で支払う1期間のみのキャップ付きディファレンシャルスワップの金利決定時点  $T$  における価値  $g(T)$  は次のように表わされる。

$$g(T) = \min \left[ \left( \frac{1}{P_f(T, T_1)} - 1 \right), K(T_1 - T) \right] \times P_d(T, T_1) - [1 - P_d(T, T_1)]$$

但し、

$K$ ；キャップレート

$T_1$ ；キャッシュフロー支払日

$P_d(T, T_1)$ ；時点  $T$  における  $T_1$  満期の本国通貨の割引債価格

$P_f(T, T_1)$ ；時点  $T$  における  $T_1$  満期の外国通貨の割引債価格

この場合、為替レートのプロセスを表現するラティスは必要なく、外国金利と本国金利のラティスのみで評価できる。

なお、多期間の場合は、各キャッシュフロー毎の価値を上記のように求め、合計することで計算できる。

### 5.2.4 クォントオプション

例えば、外国通貨建て株式の円決済クォントコールオプションの満期時点  $T$  におけるペイオフ  $g(T)$  は次のように表現される。

$$g(T) = \max [U(T) - K, 0]$$

但し、

$K$ ；行使価格

$U(T)$ ；外国通貨建て株式価格。外国金利を所与のものとした時に対数正規過程に従うことを仮定する。

このとき、 $U(T)$  は同値マルチンゲール測度の下で以下の確率過程に従う。

$$\frac{dU}{U} = (r_f - q(t) - \rho_{su}\sigma_s\sigma_u) dt + \sigma_u(\rho_{fv}dw_f + \beta^*dw_a + \sqrt{1 - \rho_{fv}^2 - \beta^{*2}}|dw_v)$$

ここで、

$$\beta^* = \frac{\rho_{av} - \rho_{af}\rho_{fv}}{\sqrt{1 - \rho_{af}^2}}$$

$q(t)$  は連続的な配当率を表し、時間に関して確定的と仮定する。

なお、この場合前述のラティス構築において為替レートの代わりに上記の外国通貨建て株式価格  $U(T)$  の連続過程を離散近似したものを用いることとなる。その際 (8), (9), (12) 及び (13) 式中の  $p_3^*(i; j, k, l)$  は以下のように変更される。

$$\ln U(t) = \ln U(0) + \int_0^t \phi_f^*(s) ds - \int_0^t q(s) ds - \rho_{su}\sigma_s\sigma_u t - \frac{\sigma_u^2}{2} t + X_u(t) \quad (8^*)$$

$$dX_u(t) = X_f(t) dt + \sigma_u(\rho_{fv}dw_f + \beta^*dw_a + \sqrt{1 - \rho_{fv}^2 - \beta^{*2}}|dw_v) \quad (9^*)$$

$$X_u(i+1; j', k', l') - X_u(i; j, k, l) = \sigma_u\sqrt{h}(\rho_{fv}Y_1 + \beta^*Y_2 + \sqrt{1 - \rho_{fv}^2 - \beta^{*2}}|Y_3) \quad (12^*)$$

$$p_3^*(i; j, k, l) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho_{fv}(1 - 2p_1(i; j)) + \beta^*(1 - 2p_2(i; j, k))}{\sqrt{1 - \rho_{fv}^2 - \beta^{*2}}} \right) + \frac{X_f(i; j)\sqrt{h}}{2\sigma_u\sqrt{1 - \rho_{fv}^2 - \beta^{*2}}}.$$

## 6. 数値例

本節では、まず外国通貨の割引債価格の評価方法の精度を確認した上で、前節の商品例の内、通貨オプションを用いて数値例を示し、我々の方法の実務的有効性を検証することとする。

### 6.1 本国通貨の同値マルチンゲール測度の下における外国通貨の割引債価格

前述のように、我々のラティスは外国通貨金利に関しては外国通貨の同値マルチンゲール測度の下で初期時点の外国通貨の割引債価格を再現できるように構成する。一方で、連続時間理論モデルであれば、本国通貨の同値マルチンゲール測度の下においても初期時点における外国通貨の割引債価格が再現される、即ち、次の関係式が成立する。

$$P_f(0, T) = \frac{1}{S(0)} E_0^d \left[ \exp \left\{ - \int_0^T r_d(s) ds \right\} S(T) \right] \quad (14)$$

ここで、 $E_0^d[\cdot]$  は本国通貨の同値マルチンゲール測度の下での時点 0 における条件付期待値オペレーターを表す。我々の離散時間近似モデルが、実務上での現実的な時間分割数でもこの関係式 (14) に関して非常に良い近似を与えることを表 1A (5 年物の場合) 及び表 1B (10 年物の場合) に示す。なお、外国通貨のイーロードカーブを 5%フラットと設定した。

### 6.2 ヨーロピアン通貨オプション

本国及び外国の金利が確率的に変動する場合におけるヨーロッパ通貨オプションを我々のラティスを用いて評価する。表 2 は、ラティス分割数  $N$  を 20, 40, 60, 80, 100 に

表 1A ラティスによる外国通貨のリスク中立測度の下での5年物外国通貨割引債価格

時間分割幅 $h$ [年]	0.125	0.0625	0.05	0.043
時間分割数 $N$	40	80	100	115
ラティスによる (14) 式の評価値	0.778746	0.778760	0.778768	0.778772
ゼロクーポンイールド換算 (%)	5.00141	5.00105	5.00084	5.00074
誤差 (bp)	0.141	0.105	0.084	0.074

参考) 5年物外国通貨割引債価格理論値は, 0.778801.

表 1B ラティスによる外国通貨のリスク中立測度の下での10年物外国通貨割引債価格

時間分割幅 $h$ [年]	0.25	0.125	0.1	0.087
時間分割数 $N$	40	80	100	115
ラティスによる (14) 式の評価値	0.606097	0.606313	0.606356	0.606379
ゼロクーポンイールド換算 (%)	5.00715	5.00359	5.00288	5.00250
誤差 (bp)	0.715	0.359	0.288	0.250

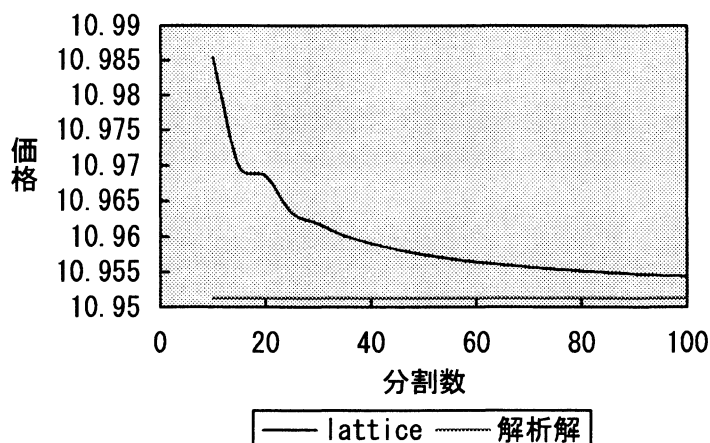
参考) 10年物外国通貨割引債価格理論値は, 0.606531.

表 2 ラティスによる5年物ATMヨーロッパアウトオプション評価値

時間分割数 $N$	20	40	60	80	100
ラティスによる評価値	10.96864	10.95910	10.95646	10.95516	10.95439
誤差率 [%]	0.158	0.071	0.047	0.035	0.026

参考) ATMヨーロッパアウトの理論値は, 10.95131.

図 1 ラティスによるヨーロッパアウト評価値



設定した際の5年物のATMヨーロッパ通貨プットオプションのそれぞれの評価値を示す。この数値を図1でグラフで示す。表3は、ラティス分割数  $N$  を50に固定した際のさまざまな行使価格(ATMを中心に5ケース)のヨーロッパコール及びプットオプションについてのラティスによる評価値及びその理論値<sup>3</sup>を示す。これらの数値は、我々のラティスが、年当たり10分割程度の比較的粗いラティス分割数においても、誤差率0.1%以下という非常に高い精度で長期のヨーロッパオプションを評価できることを示している。なお、本国通貨のイールドカーブには'97年6月11日の日本円金利スワップ市場実勢値及び同LIBORから構成したイールドカーブ(参考として、初期値  $r_d(0)=0.005662$ )を使用し、外国通貨のイールドカーブには同日の米ドルについて同様に構成したイールドカーブ( $r_f(0)=0.057527$ )を使用した。円の対米ドル為替レート  $S(0)$  は113円とした。円金利、米ドル金利、為替レートのボラティリティは'97年6月11日の市場実勢値からそれぞれ

表 3A 行使価格別 5 年物ヨーロッパコール評価値

	OTM		ATM		ITM
行使価格	99.02	94.52	90.02	85.52	81.02
ラティスによる評価値	7.883461	9.309364	10.95003	12.823629	14.946123
理論値	7.888815	9.312384	10.95131	12.824220	14.946875
誤差率 (%)	-0.068	-0.032	-0.012	-0.005	-0.005

注) 時間分割数は50分割

表 3B 行使価格別 5 年物ヨーロッパプット評価値

	ITM		ATM		OTM
行使価格	99.02	94.52	90.02	85.52	81.02
ラティスによる評価値	15.998178	13.370510	10.95735	8.777632	6.846554
理論値	15.995958	13.365956	10.95131	8.770649	6.839732
誤差 (%)	0.014	0.034	0.055	0.080	0.100

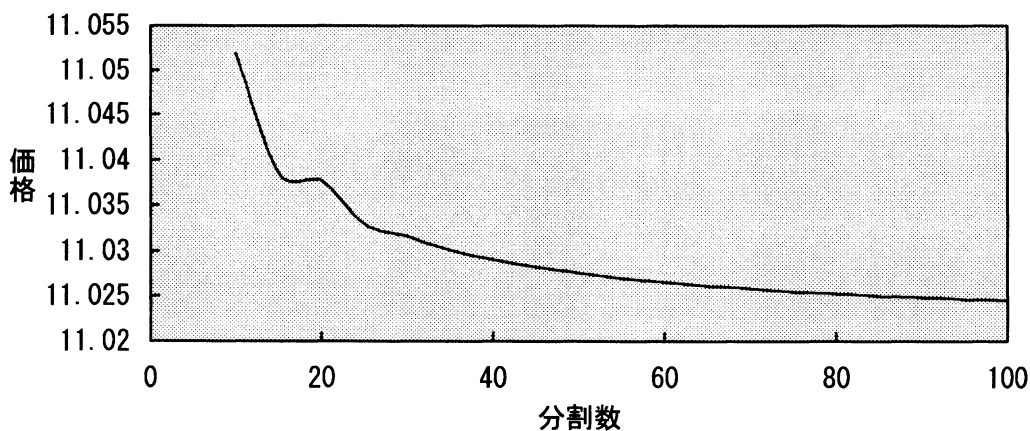
注) 時間分割数は50分割

表 4 ラティスによる 5 年物 ATM アメリカンプットの評価

時間分割数	20	40	60	80	100
アメリカン評価値	11.03772	11.02910	11.02659	11.02528	11.02452
ヨーロッパ評価値	10.96864	10.95910	10.95646	10.95516	10.95439
差	0.06908	0.07	0.07013	0.07012	0.07013

参考) ATM ヨーロッパプット理論値は, 10.95131.

図 2 ラティスによるアメリカンプット評価値



れ  $\sigma_d=0.0073$ ,  $\sigma_f=0.0083$ ,  $\sigma_s=0.15$  と設定した。また, 他のパラメータ値は, '97年 6月11日から直近 1 年間の日次データを用いて推計し,  $k_d=0.001$ ,  $k_f=0.012$ ,  $\rho_{df}=0.025434$ ,  $\rho_{fs}=-0.09939$ ,  $\rho_{ds}=-0.171753$  とした。

### 6.3 アメリカン通貨オプション

前述「6.2 ヨーロッパ通貨オプション」のアメリカンスタイルオプションについて, 我々のラティスを用いて評価する。表 4 は, 時間分割数  $N$  を 20, 40, 60, 80, 100 にした際のそれぞれの ATM アメリカンプットオプションのラティスによる評価値及び同じ時間分割数でのヨーロッパプット評価値との差を示す。また, 図 2 でこの内容をグラフで示

表 5 ラティスによる 5 年物行使価格別アメリカンプット評価値

	ITM		ATM	OTM	
行使価格	99.02	94.52	90.02	85.52	81.02
アメリカン評価値	16.121872	13.464788	11.02756	8.828226	6.881895
ヨーロッパン評価値	15.998178	13.370510	10.95735	8.777632	6.846554
差	0.123694	0.094278	0.07021	0.050564	0.035341

注) 時間分割数は50分割

した。この数値を見る限り、我々のラティスが年当り10分割程度の粗い時間分割でも、十分な精度でアメリカンオプションを評価できることを示している。表5は、さまざまな行使価格（ATMを中心に5ケース）のアメリカンプットの評価値及び対応するヨーロッパンプットのラティスによる評価値を示す。なお、自国及び外国のイールドカーブ、及び各種パラメータは、前述「6.2 ヨーロッパン通貨オプション」と同じものを使用した。

## 7. おわりに

我々は、1年当りの時間分割数が10分割程度で時価評価の誤差率を0.1%以下にするという極めて計算効率の高い3変数ラティスモデルを開発した。今回のモデルは、基本となる金利プロセスとして拡張Vasicekタイプのタームストラクチャーモデルを用いたが、より広いクラスの金利モデルへ一般化することは可能である。ボラティリティが瞬間短期金利水準に依存する金利モデルは簡単な変数変換を行うことによって、ボラティリティがコンスタントなプロセスへ変換できる。これを用いて各ノード上における金利プロセスのトレンドを計算する際に再帰的な計算が必要となる点を除けば、今回の論文の手法と同様にして経路独立型ラティスを構成できる。この一般化によって、様々な金融機関が単一通貨の金利派生商品（キャップやスワップションなど）の評価に用いているタームストラクチャーモデルをそのまま拡張できるようになり、複合派生商品とそのヘッジツールとの間にモデル間の整合性を確保でき、我々のラティスをよりスムーズに実務に適用できる。

(たかはし あきひこ・ときおか たかみ)

### 注

1. 式 (1), (2), (3) の導出はHull/White [1994] のAppendix Aを参照のこと。
2. 「6. 数値例」で用いた日本円と米ドルの例では、状態推移確率の値の範囲に問題が生じなかった。
3. Amin/Jarrow [1991] の (35) 式を参照のこと。

### 引用文献

- Amin, K. I., and R. Jarrow [1991], "Pricing Foreign Currency Options under Stochastic Interest Rates," *Journal of International Money and Finance* 10, pp. 310-330.
- Amin, K. I., and J. N. Bodurtha [1995], "Discrete-Time Valuation of American Options with Stochastic Interest Rates," *The Review of Financial Studies* 8, pp. 193-234.
- Dempster, M. A. H., and J. P. Hutton [1997], "Fast Numerical Valuation of American, Exotic and

- Complex Options," *Applied Mathematical Finance* 4, pp. 1-20.
- Heath, D., R. Jarrow and A. Morton [1992], "Bond Pricing and the Term-Structure of Interest Rates: A New Methodology," *Econometrica* 60, pp. 77-105.
- Harrison, J. M., and S. R. Pliska [1981], "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and Their Applications* 11, pp. 215-260.
- Hull, J., and A. White [1990], "Pricing Interest Rate Derivative Securities," *The Review of Financial Studies* 3, pp. 573-592.
- Hull, J., and A. White [1994], "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models," *Journal of Derivatives* 2, Winter, pp. 37-48.
- Vasicek, O. [1977], "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics* 5, pp. 177-188.