

平均オプション価格の評価法*

国友直人

(東京大学)

高橋明彦**

(日本興業銀行)

日本の金融市場が国際化して発展を続けている中で様々な新しい金融商品が登場している。こうした金融商品の代表的なものとしてオプション契約を挙げることができるが、オプション市場が整備されるとともに近年ではさまざまなオプション契約の取引が活発に行われるようになってきている。権利行使時におけるペイ・オフが資産価格が過去にとる履歴に依存するようなオプション契約は一般に経路依存型オプション契約と呼ばれているが、原資産や権利行使価格がオプション契約中の平均値となる平均オプション(Average Options)(あるいはアジア型オプション契約(Asian Options)と呼ばれている)を代表的例として挙げる事ができよう。この種のオプションは近年において外国為替市場や原油の商品市場などにおけるリスク・ヘッジの手段として注目されている。

本稿では幾何平均オプション価格を利用する算術平均オプション価格の新しい評価法を提案する。本稿で提案する方法はこれまでに提案されている数値計算方法、例えば畳み込み法(convolution method)などと比較するとオプション契約の理論価格の最終形が簡単な形で与えられるので計算が比較的簡単であり、必要な計算時間も短い。また、新しい一つの漸近理論を用いてボラティリティー母数 σ がゼロに近づくとき極限では近似価格が真の価格に一致することを示した。この漸近理論は現実にはボラティリティー母数があまり大きくない場合には理論価格の近似の精度を実用的に十分なまでに保証してくれる。さらに、理論的分析を踏まえ本稿ではより実用的と思われる算術平均オプションの理論価格の評価法も提案する。ここで提案する近似法についての若干の数値シミュレーションの結果から判断する限り我々の計算方法は実務的にも有用である。

目次

- | | |
|---------------------|--------------------|
| I. はじめに | IV. 算術平均オプションの評価法 |
| II. 平均オプションとは? | 1. 算術平均の漸近分布 |
| 1. 算術平均と幾何平均 | 2. 算術平均のモーメントの性質 |
| 2. 平均オプション | 3. 算術平均分布の近似法 |
| 3. 問題設定 | 4. 算術平均オプション価格の計算法 |
| III. 幾何平均オプションの理論価格 | 5. ボラティリティーの推定 |
| 1. 幾何平均の条件付分布 | V. ヘッジ・ポートフォリオ |
| 2. 幾何平均オプションの価格評価 | VI. 結語 |
| | 数学付録 |

*この研究を進めるにあたって日本証券奨学財団から援助を受けた。また、原論文を細部にわたって検討してコメントを寄せてくれた本誌のレフェリーに感謝する。

**この研究は所属する日本興業銀行の活動及び見解とは無関係であり、ありうべき責任は個人に属すべきことをお断りする。

I. はじめに

日本の金融市場が発展を続け国際化してゆく中で、最近になって日本の市場においても様々な新しい金融商品が登場するようになった。こうした金融商品の代表的なものとして例えばオプション契約を挙げることができるが、日本におけるオプション市場が整備されるとともに最近ではさまざまなオプション契約の取引が活発に行われるようになってきている。通常のオプション契約では権利行使時におけるペイ・オフはその時点において対象としている資産の価格水準によって一意的に決定している。したがって、その場合にはオプションの契約時点から権利行使の時点まで対象とする資産価格がどのような経路をとって変動するかは直接のペイ・オフに関係しないことになる。一方、外国為替市場では様々な理由で権利行使時におけるペイ・オフが資産価格が過去にとる履歴に依存するようなオプション契約が盛んに取引されるようになってきている。このように権利行使時におけるペイ・オフが資産価格の過去にとる履歴に依存するようなオプション契約は一般に経路依存型オプション契約 (path dependent options) と呼ばれている。この種のオプションとしては例えば満期における評価価格や権利行使価格がオプション契約中の資産価格の最大値や最小値とするオプション契約やあるいはこれらが契約中の資産価格の平均値を用いるオプション契約などを挙げることができる。経路依存型オプションの中でも特に原資産や権利行使価格がオプション契約中の平均値となる契約は平均オプション (Average Options)、あるいはアジア型オプション契約 (Asian Options) と呼ばれているが、近年において OTC (相対取引) の形で活発に取

引が行われている。こうしたオプション契約の取引が活発化している経済的背景としては近年における外国為替レートに係わる不確実性が増していることなどが挙げられよう。例えば輸出入などの実需にもとづいて外国為替市場に参加し、外国為替取引を行っている企業にとって為替の乱高下にもとづいて生じるリスクを抑えるための一つのリスク・ヘッジ手段として外国為替レートの平均値を指標とするオプション契約を需要することが考えられよう。またこの種のオプション契約は仕上がりレートが期間中の平均レートよりやや低いレートで満足する企業、仕入れ価格を期間の平均価格で決定する企業、あるいは日次・週次などで均等に為替予約を締結している企業などにとっても比較的魅力的な契約となっているようである。さらに外国為替市場以外のオプション市場に目を転じてみると、金融の専門誌 Risk (Vol.3, No.1, December 1989-January 1990) の記事や日本経済新聞1991年1月21日の記事によれば内外で新たに原油などの商品や金利などを対象資産とする新しい平均オプション契約が盛んに開発されているようである。

さて、オプション価格理論の立場から見ると経路依存型オプションの評価問題についてはこれまでに若干の研究が行われている。例えば原資産や権利行使価格がオプション契約中の資産価格の最大値や最小値となる場合については、Goldman=Sosin=Gatto [5] がオプション契約の理論価格を導いている。また、平均オプション (Average Options) の理論価格については最近では Bergman [2] 及び Carverhill=Clewlow [3] などが既に研究を行っている。しかしながら、平均オプション価格の評価問題については理論上なお若干の未解決の問題が存在するようと思われる。オプション契約の価格評価では原

資産の価格が幾何ブラウン運動にしたがうと考えるのが標準的であるが、権利行使時における評価価格や権利行使価格がオプション契約中に変動する資産価格の算術平均値 (arithmetic mean) となる場合には一般的に厳密な (exact) 理論価格の公式を導出することは困難である。Bergman [2] はこの問題を検討しているが彼が導いた理論価格は権利行使価格がゼロとなる現実的でない特殊な場合に限定されている。また Ingersoll [7] の教科書では (377ページ) あたかも平均オプションの理論価格が明示的に導出可能かのように説明しているがこれは誤解であろう。

この論文の次節で簡単に述べるように算術平均にもとづく平均オプション契約については一般には明示的に理論価格を求めることが困難であるが、この問題に対するもう一つのアプローチとして数値的にオプション価格を求めることが考えられる。例えば、オプション価格の満たすべき偏微分方程式をオプション契約の一般理論から導くことができるので (例えば Ingersoll [7] の377ページあるいは本稿Vを参照), 与えられた境界条件の下でよく知られた数値計算法、例えば有限要素法 (Finite Difference Method) を用いて近似的に解を求めることが考えられよう。さらに最近 Carverhill=Clewlow [3] はこの問題について高速フーリエ変換 (FFT) 法にもとづく畳み込み (Convolution) 計算を繰り返す数値的解法を提案している。ここで彼らの方法を“畳み込み法”と呼ぶことにするが、平均オプション契約の理論価格の数値を直接的に求める方法として実務界においても注目を浴びている。

しかしながら、このようなこれまでに提案されている数値計算法についてもその方法を子細に検討してみるとなお実際の問題が存在するこ

とを指摘することができる。ここでの基本的問題は原資産価格が幾何ブラウン運動にしたがうとき価格の算術平均の分布を数値的に求めることにある。例えば畳み込み法は算術平均の分布を高速フーリエ変換による畳み込み (convolution) 計算を大量に行う方法である。この畳み込み計算は数値的に複雑な計算を行うことになるので、実用上に十分なほど多くの回数を行うと単に計算時間が長くなるばかりでなく計算誤差がかなり大きくなることが予想できる。ここで Carverhill=Clewlow [3] が説明している方法を用いて我々が行った数値計算にもとづく実験結果の1つを表1に示しておこう。

この表1は資産価格が幾何ブラウン運動にしたがっていると仮定した場合に資産価格の和の分布の平均と分散を高速フーリエ変換にもとづく畳み込み法によって計算し、その結果をそれぞれ対応する平均と分散の理論値と比較したものである。ただし、ここで理論値とは本稿のIVで導出した公式を用いて計算していることに注意しておこう。表1からこの畳み込み法で計算した平均と分散は平均をとる回数が少ない場合、例えば5回や10回程度では計算精度が高いことがわかる。他方、平均をとる回数を多くするとその誤差は無視できないほど大きくなることもまた観察することができよう。すなわち平均をとる回数を80回以上にすると数値計算上の累積誤差が大きくなっている。したがって、オプション契約の理論価格を計算する際、単位期間を

表 1

平均をとる回数	5	10	80	126	252
FFTによる期待値 (理論値)	148.141 148.213	148.205 148.361	147.130 148.491	146.305 148.498	144.164 148.504
FFTによる分散 (理論値)	96.596 96.576	84.659 84.603	76.799 74.703	79.332 74.202	92.807 73.767

短くって計算精度を高めようとしたり、また比較的長い期間にわたってオプション契約を設定したりする場合には深刻な問題を引き起こすことが予想される。

本稿においては平均オプション契約の理論価格を計算する実用的な新しい方法を提案する。予め、ここで提案する方法の概要をまとめると以下の通りである。まず平均オプション契約の中でも幾何平均にもとづくオプション契約に注目する。算術平均にもとづくオプション契約の場合とは異なり、実は幾何平均にもとづくオプション契約の理論価格の場合には明示的な公式を求めることができる。これは原資産価格が幾何ブラウン運動にしたがうとき価格の幾何平均は対数正規分布にしたがうことの結果である。そこで我々はこの理論価格を次のように利用する。すなわち中心極限定理（あるいは不変原理 “Invariance Principle”）を利用してボラティリティー母数が小さいとき価格の算術平均が対数正規分布で近似できることを証明する。このことから価格の算術平均の分布関数を近似するにはその平均と分散を近似すればよいことが正当化される。すなわち、算術平均の期待値と分散を計算すれば幾何平均の分布を使って算術平均の近似分布を求めることができるのである。ヨーロッパ型のオプション契約の場合には権利行使時刻における資産価格の近似分布を求めることができれば、リスク中立化法 (Risk Neutralized Method) を用いることにより契約の理論価格を導くことができることが知られている。そこで、我々はリスク中立化法を利用して算術平均に基づくオプションの新しい評価法を与えることができるのである。

本稿の以下の構成は次の通りである。IIでは平均オプション契約として4つのタイプの契約を説明する。IIIでは幾何平均に基づくオプシ

ン契約の評価法を考察する。続いて、IVでは本稿で提案する算術平均に基づくオプション契約の評価法を説明する。Vでは簡単に本稿とこれまでに他の研究で導かれている平均オプション契約に関する偏微分方程式の関連について言及し、VIでは本稿の結論を述べる。最後に本稿で導いた数学的命題の証明を数学付録として与えた。

II. 平均オプションとは？

ここで平均オプション契約 (Average Options) と呼ばれているオプション契約について簡単にまとめておこう。時刻 t における資産価格を S_t としておく。また以下の議論ではヨーロッパ型のオプションのみを考察するのでオプション契約の満期を T としておく。このような設定のもとで平均オプション契約と呼びうる様々なオプション契約が考えられる。そこで以下での問題を明確にするために平均オプション契約を整理しておくことにしよう。

1. 算術平均と幾何平均

初期時刻を $t = 0$ とする。資産価格 S_i が離散時刻 $i = 1, 2, \dots, n$ において観測されるとすれば資産価格 $\{S_i\}$ の幾何平均は

$$M_n = \left(\prod_{i=1}^n S_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

で与えられる。ここで

$$M_n = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln S_i\right)$$

と表すことができることに注意しておこう。区間 $[0, T]$ において最終時刻 T を固定して区間 $(i-1)T/n \leq t \leq iT/n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) に対して

$$S_i(n) = \left(\frac{[iT]/n - t}{T/n} \right) S_{i-1}$$

$$+ \left(\frac{t - [(i-1)T]/n}{T/n} \right) S_i$$

によって $\{S_t(n)\}$ を定めると、 $n \rightarrow \infty$ のとき分布の意味(弱収束)で $S_t(n) \rightarrow S_t$ となる連続時間において連続経路をとる資産価格 $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ を考えることができる。このとき確率過程 $\{S_t\}$ の幾何平均は

$$M_T = \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt\right) \quad (1)$$

で与えられる。

これに対して、離散時間モデルにおける資産価格 $\{S_i, i = 1, \dots, n\}$ の算術平均は

$$Z_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i \right)$$

で与えられる。幾何平均の場合と同様に考えれば、連続時間 $0 \leq t \leq T$ における確率過程 $\{S_t\}$ の算術平均は

$$Z_T = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \quad (2)$$

となる。ここで念のために確率過程 $\{S_t\}$ についての2つの平均を以下のように定義しておこう。

定義1：連続時間 $0 \leq t \leq T$ における資産価格 $\{S_t\}$ の算術平均は(2)で定義される。また連続時間 $0 \leq t \leq T$ における資産価格 $\{S_t\}$ の幾何平均は(1)で定義される。

2. 平均オプション

一般にある原資産に対してオプション契約者の対象資産と権利行使時点における権利行使価格としてどのようなものを選択するかにより様々な種類の平均オプション契約を考えることができる。本稿においては平均オプション契約としては次に挙げる2つの形を考えることにする。

定義2：タイプ1の(算術)平均オプション契約とはオプション契約者の対象資産が Z_T となる

契約である。この種の契約の場合、権利行使価格を K (一定値) とすれば、満期のペイ・オフはコール・オプションについては

$$\text{Max}\{Z_T - K, 0\},$$

またプット・オプションの場合には

$$\text{Max}\{K - Z_T, 0\}$$

で与えられる。

定義3：タイプ2の(算術)平均オプション契約とはオプション契約者の権利行使価格が Z_T となる契約である。この種の契約の場合、対象資産が Z_T となるので、満期のペイ・オフはコール・オプションについては

$$\text{Max}\{S_T - Z_T, 0\},$$

またプット・オプションの場合には

$$\text{Max}\{Z_T - S_T, 0\}$$

で与えられる。

同様にして定義1の対象資産として原資産価格の幾何平均をとればタイプ1の幾何平均オプション契約が考えられる。また定義2の権利行使価格として原資産価格の幾何平均をとればタイプ2の幾何平均オプションを考えることができる。したがって、以下では算術平均と幾何平均にたいしてタイプ1とタイプ2のオプション契約を考察するので合計4種類のオプション契約の理論価格を求めることになる。

3. 問題設定

ここで期間 $0 \leq t \leq T$ において原資産価格 $\{S\}$ が連続確率過程

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dW \quad (3)$$

にしたがうことを仮定しよう。ここで α と σ はそれぞれドリフト項母数とボラティリティー母数と呼ばれるが以下では簡単化の為に一定とす

る。また、 W は標準ブラウン運動を表す。このような確率過程は幾何ブラウン運動(Geometric Brownian Motion)と呼ばれているが、オプション理論における標準的確率過程である。

次に原資産価格が幾何ブラウン運動にしたがうとき平均オプション価格の評価を考えよう。本稿では以下Cox=Ross [4] が提案し、Harrison=Kreps [8] によって理論的に正当化されたリスク中立化法 (Risk Neutralized method) を用いることにする。このリスク中立化法では通常のオプション契約の場合にはドリフト項母数 α を安全資産の利子率 r によって置き換える。これに対して外国為替市場におけるオプション契約では金利として自国通貨の利子率 r_d と対象とする通貨の外国利子率 r_f が存在する。この場合にはドリフト項母数 α を $r_d - r_f$ で置き換えることになる。本稿では自国利子率 r_d 及び対象とする通貨の外国利子率 r_f はともに期間 $0 \leq t \leq T$ において一定と仮定しておく。

さらに時刻 t におけるコール・オプション契約に対する価格 (プレミアム) をタイプ1とタイプ2についてそれぞれ $C(I, t)$, $C(II, t)$ で表そう。同様にして、時刻 t におけるプット・オプション契約に対する価格をタイプ1とタイプ2についてそれぞれ $P(I, t)$, $P(II, t)$ で表すことにする。リスク中立化法によれば時刻 t におけるオプション契約の価格は満期における自国建てペイ・オフを自国の金利で割引いた金額の期待値で与えられる。すなわち、

(a) タイプ1のコール・オプションの場合

$$C(I, t) = e^{-r_d(T-t)} E_t(\text{Max}\{Z_T - K, 0\}),$$

(b) タイプ1のプット・オプションの場合

$$P(I, t) = e^{-r_d(T-t)} E_t(\text{Max}\{K - Z_T, 0\}),$$

(c) タイプ2のコール・オプションの場合

$$C(II, t) = e^{-r_d(T-t)} E_t(\text{Max}\{S_T - Z_T, 0\}),$$

(d) タイプ2のプット・オプションの場合

$$P(II, t) = e^{-r_d(T-t)} E_t(\text{Max}\{Z_T - S_T, 0\}),$$

となる。ここで、期待値演算 $E_t(\cdot)$ は確率過程 (3)におけるドリフト項 α を内外金利差 $r_d - r_f$ で置き換えたリスク中立確率測度について時刻 t における条件付期待値を表すものとする。

以上で与えられたオプション・プレミアムを具体的に求めるにはタイプ1の場合には時刻 t までの情報を所与とする Z_T の条件付密度関数を求める必要が生じる。またタイプ2の場合には (Z_T, S_T) の条件付同時密度関数を求める必要がある。ここで注意する必要があるのは一般に $\{S_t\}$ が幾何ブラウン運動にしたがうという仮定の下では Z_T や (Z_T, S_T) の条件付密度関数は明示的に導出することが困難であるとの数学的事実である。このことはこれらの条件付分布を求めるためには対数正規分布の畳み込み(convolution)を無限回行う必要が生じることの結果である。他方、確率論でよく知られている正規分布の再生性を用いると $\{S_t\}$ が幾何ブラウン運動にしたがうという仮定の下では $\{M_n\}$ は対数正規分布にしたがうことになるので確率過程 $\{M_T\}$ も対数正規分布にしたがうことが推測できる。そこでこのことから M_T の条件付密度関数や (S_T, M_T) の条件付同時密度関数を求めることが可能であることがわかる。さらに、これらの条件付密度関数を求めることができれば通常のオプション契約の評価法によりオプション・プレミアムを明示的に表現することが可能となる。すなわち、幾何平均にもとづくオプション契約の場合には理論価格は比較的容易に求めることができるのである。

次に我々は算術平均にもとづくオプション契約の理論価格と幾何平均にもとづくオプション契約の理論価格の関係に注目する。IVで示すよ

うにある漸近的意味で算術平均にもとづくオプション契約の理論価格は幾何平均にもとづくオプション契約の理論価格によって近似することが正当化される。こうした方法を説明する前提としてまず幾何平均にもとづくオプション契約の理論価格を導いておこう。

III. 幾何平均オプションの理論価格

本節では幾何平均にもとづくオプションの理論価格を導くことにする。ヨーロッパ型のオプション価格を求めるには満期における対象資産価格の分布を知る必要がある。

1. 幾何平均の条件付分布

原資産価格 $\{S_t\}$ についての幾何平均は(2)で与えられた。(2)に対して対数変換を行えば

$$\ln(M_T) = \frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt \quad (4)$$

となる。ここで $\{S_t\}$ は(3)にしたがうと仮定したので伊藤の補題 (Ito's Lemma) を用いれば

$$d(\ln S) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW \quad (5)$$

と変換される。時刻 t で条件付きで考えると

$$\begin{aligned} \ln(S_T) &= \ln(S_t) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \\ &\quad + \sigma \int_t^T dW \end{aligned} \quad (6)$$

となる。すなわちこの形から $\ln(S_T)$ は平均 $\ln(S_t) + (\alpha - \sigma^2/2)(T-t)$, 分散 $\sigma^2(T-t)$ の正規分布にしたがうことがわかる。(厳密には III の定理 1 を参照されたい。) ここで(4)より時刻 t における条件付きで考えれば,

$$\begin{aligned} \ln(M_T) &= \frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) dt \\ &= \frac{t}{T} \ln(M_t) + \frac{1}{T} \int_t^T \ln(S_s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{t}{T} \ln(M_t) + \frac{(T-t)}{T} \ln(S_t) \\ &\quad + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{(T-t)^2}{2T} \\ &\quad + \sigma \frac{1}{T} \int_t^T \int_t^s dW ds \end{aligned} \quad (7)$$

と書くことができる。これから条件付期待値を求めると

$$\begin{aligned} E_t(\ln(M_T)) &= \frac{t}{T} \ln(M_t) + \frac{(T-t)}{T} \ln(S_t) \\ &\quad + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{(T-t)^2}{2T} \end{aligned} \quad (8)$$

となるのがわかる。次に条件付分散を求めてみよう。ここで

$$\begin{aligned} V_t(\ln(M_T)) &= E_t \left(\sigma \frac{1}{T} \int_t^T \int_t^s dW ds \right)^2 \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{T} \right)^2 E_t \left\{ \int_t^T \int_t^T \left(\int_t^s dW \right) \left(\int_t^{s'} dW \right) ds ds' \right\} \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{T} \right)^2 \left\{ \int_t^T \int_t^T E_t \left[\left(\int_t^s dW \right) \left(\int_t^{s'} dW \right) \right] ds ds' \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。期待値と積分記号の順序交換についてはフビニ (Fubini) の定理 (例えば Ikeda = Watanabe[6], 116ページを参照) を用いている。ここで任意の $s > s'$ に対して $W(s) = W(s') + (W(s) - W(s'))$ と書けばブラウン運動の性質から $W(s')$ と $(W(s) - W(s'))$ は独立であるから

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_t^T \int_t^T E_t \left[\left(\int_t^s dW \right) \left(\int_t^{s'} dW \right) \right] ds ds' \right\} \\ &= 2 \left\{ \int_0^{T-t} \int_0^s E [W(s) W(s')] ds' ds \right\} \\ &= 2 \left\{ \int_0^{T-t} \int_0^s E \{ [W(s') + (W(s) - W(s'))] W(s') \} ds' ds \right\} \\ &= \frac{(T-t)^3}{3} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。したがって

$$V_t(\ln(M_T)) = \sigma^2 \left(\frac{1}{T} \right)^2 \frac{(T-t)^3}{3} \quad (11)$$

で与えられる。同様にして $\ln(M_T)$ と $\ln(S_T)$ の条件付共分散を求めると

$$\begin{aligned} & \text{Cov}_t(\ln(M_T), \ln(S_T)) \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{T} \right) E_t \left\{ \left(\int_t^T \int_t^s dW ds \right) \left(\int_t^T dW \right) \right\} \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{T} \right) \left\{ \int_0^{T-t} [E(W(s)W(T-t))] ds \right\} \\ &= \sigma^2 \left(\frac{1}{T} \right) \left\{ \frac{(T-t)^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

となることがわかる。このことから $\ln(M_T)$ と $\ln(S_T)$ の条件付相関係数を ρ とすれば、 ρ は

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\text{Cov}_t(\ln(M_T), \ln(S_T))}{\sqrt{V_t(\ln(M_T))} \sqrt{V_t(\ln(S_T))}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

で与えられる。

ところで任意の実数 a, b にたいして線形結合

$$\begin{aligned} a \ln(S_T) + b \ln(M_T) &= \{ a \ln(S_0) + b \ln(M_0) \} \\ &+ \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left\{ a \int_0^T dt + b \left(\frac{1}{T} \right) \int_0^T dt \right\} \\ &+ \sigma \left\{ a \int_0^T dW + b \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

は明らかに正規分布にしたがっている。(例えば数学付録(ii)を参照されたい。)以上の議論を使いやすい結果としてまとめると以下のように整理できる。

定理1: 確率過程 $\{S_t\}$ が(3)にしたがうとき $(\ln(S_T/S_t), \ln(M_T/M_t))'$ の同時分布は2次元正規分布 $N_2(\mu, \Sigma)$ であって平均ベクトル $\mu' = (\mu_1, \mu_2)$ と共分散行列 $\Sigma = (\sigma_{ij})$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (\alpha - \sigma^2/2)(T-t), \\ \mu_2 &= ((T-t)/T) \ln(S_t/M_t) \\ &+ (\alpha - \sigma^2/2)((T-t)^2/2T), \\ \sigma_{11} &= \sigma^2(T-t), \sigma_{22} = \sigma^2((T-t)^3/3T^2), \\ \sigma_{12} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\sigma_{11}} \sqrt{\sigma_{22}} \end{aligned}$$

で与えられる。

2. 幾何平均オプションの価格評価

幾何平均の分布を求めることができたので幾何平均にもとづくオプション契約の理論価格を求めてみよう。その為に次の有用な命題を準備する。命題の証明は数学付録(i)に与えておいた。

補題2: 確率変数 $x' = (x_1, x_2)$ が平均 μ' , 共分散行列 Σ の2次元正規分布 $N_2(\mu, \Sigma)$ にしたがうとする。このとき任意のベクトル a とスカラー b に対して以下が成立する。

$$\begin{aligned} & \iint_{(1,-b)x \geq c} e^{a'x} n_2(x | \mu, \Sigma) dx \\ &= \exp \left(a' \mu + \frac{1}{2} a' \Sigma a \right) \\ & \cdot \Phi \left[\frac{(1,-b)'(\mu + \Sigma a) - c}{\sqrt{(1,-b)' \Sigma (1,-b)}} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

ただし $n_2(x | \mu, \Sigma)$ は $N_2(\mu, \Sigma)$ の密度関数、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数を表すものとする。

(タイプ1のオプション価格) まずタイプ1の幾何平均オプションの価格を導こう。コール・オプションの場合にはリスク中立化法を用いると

$$\begin{aligned} C(t) &= e^{-r_d(T-t)} E_t(\text{Max}\{M_T - K, 0\}) \\ &= e^{-r_d(T-t)} \left\{ M_t \int_{\ln(K/M_t)}^{+\infty} e^{xn} n(x | \mu_2, \sigma_{22}) dx \right\} \end{aligned}$$

$$-K \int_{\ln(K/M_t)}^{+\infty} n(x | \mu_2, \sigma_{22}) dx \} \quad (16)$$

と表すことができる。ただし $n(x | \mu, \sigma^2)$ は平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布の密度関数を表している。ここで補題 2 を適用して $x = (M_T, S_T)'$, $a = (1, 0)$, $b = 0$, $c = \ln(K/M_t)$ とおけばコール・オプションの価格は

$$C(t) = e^{-r_d(T-t)} \{ M_t \exp(\mu_2 + \sigma_{22}/2) \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \},$$

$$d_1 = \{ -\ln(K/M_t) + (\mu_2 + \sigma_{22}) \} / \sqrt{\sigma_{22}},$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma_{22}} \quad (17)$$

となることが分かる。ただし念のためリスク中立化法を用いたのでドリフト項母数 α は $r_d - r_f$ で置き換えたことに注意しておこう。

タイプ 1 のプット・オプションの理論価格については通常のオプションと同様にプット・コール・パリティを考えよう。ここでポートフォリオ A とポートフォリオ B として

A: コール・オプション C 円と債券 $e^{-r_d(T-t)}K$ 円,

B: プット・オプション P 円と
コール・オプション (行使価格ゼロ) $e^{-r_d(T-t)}E_t(M_T)$ 円,

を考えると、これら 2 つのポートフォリオの権利行使時点におけるペイ・オフは以下の表で与えられる。

ここで、通常のオプション理論にしたがってこ

表 2

	$M_T \geq K$	$M_T < K$
C	$-M_T + K$	0
$-P$	0	$-M_T + K$
$e^{-r_d(T-t)}K$	$-K$	$-K$
$-e^{-r_d(T-t)}E_t(M_T)$	M_T	M_T
0	0	0

の経済に“無リスクの裁定機会”が存在しないことを仮定するとプット・コール・パリティの条件を用いることができる。したがって、表 2 よりプット・オプションの価格は

$$P(t) = C(t) + e^{-r_d(T-t)}K - e^{-r_d(T-t)}E_t(M_T)$$

$$= C(t) + e^{-r_d(T-t)}K - e^{-r_d(T-t)}M_t \exp(\mu_2 + \sigma_{22}/2) \quad (18)$$

で与えられる。

(タイプ 2 のオプション価格) 次にタイプ 2 の幾何平均オプション契約の理論価格を導こう。コール・オプションの場合にはリスク中立化法を用いると

$$C(t) = e^{-r_d(T-t)}E_t(\text{Max}\{S_T - M_T, 0\}) \quad (19)$$

である。ここで領域 $\{S_T - M_T > 0\}$ は領域

$$\{\ln(S_T/S_t) - \ln(M_T/M_t) > \ln(M_t/S_t)\}$$

に一致することに注意しよう。 $x' = (\ln(S_T/S_t), \ln(M_T/M_t))'$ として補題 2 を適用するために

$$C(t) = e^{-r_d(T-t)} \left\{ \int_{(1,-1)x > \ln(M_t/S_t)}^{+\infty} [S_t e^{x_1} - M_t e^{x_2}] n_2(x | \mu, \Sigma) dx \right\} \quad (20)$$

と書き直しておこう。ここで (20) の右辺の積分項を 2 つに分割してそれぞれの項を A, B と表すことにしておけば

$$C(t) = e^{-r_d(T-t)} \{A - B\} \quad (21)$$

となる。項 A については $a = (1, 0)$ とおいて補題 2 を適用すれば

$$A = S_t \exp(\mu_1 + \sigma_{11}/2) \Phi(d_3),$$

$$d_3 = \frac{\mu_1 - \mu_2 + \sigma_{11} - \rho\sigma_1\sigma_2 - \ln(M_t/S_t)}{\sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}} \quad (22)$$

で与えられることが分かる。ただし $\sigma_1 = \sqrt{\sigma_{11}}$, $\sigma_2 = \sqrt{\sigma_{22}}$ と置いた。同様にして項 B については $a = (0, 1)$ とおいて補題 2 を適用すれば

$$B = M_t \exp(\mu_2 + \sigma_{22}/2) \Phi(d_4),$$

$$d_4 = \frac{\mu_1 - \mu_2 + \rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_{22} - \ln(M_t/S_t)}{\sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\rho\sigma_1\sigma_2)}} \quad (23)$$

となる。すなわち、通常のオプション公式よりも若干複雑ではあるが標準正規分布の分布関数を用いたコール・オプションの明示的な評価式が得られた。

次にタイプ 2 の幾何平均プット・オプションの理論価格を求めよう。国内金利は r_d , また外国金利は r_f としたので、ドリフト項母数 α に $r_d - r_f$ を代入して S_T の現在価値を求めると

$$e^{-r_d(T-t)} E_t(S_T) = e^{-r_d(T-t)} e^{(r_d-r_f)(T-t)} S_t$$

$$= e^{-r_f(T-t)} S_t \quad (24)$$

となる。このことに注意してタイプ 1 のオプションの場合と同様にポートフォリオ C とポートフォリオ D を

C: コール・オプション C 円と

コール・オプション (権利行使価格ゼロ)
 $e^{-r_d(T-t)} E_t(M_T)$ 円,

D: プット・オプション P 円と為替

$e^{-r_f(T-t)}(S_t)$ 円,

により構成すれば、権利行使時点におけるペイオフの表は以下のように与えられる。

表 3

	$M_T \geq S_T$	$M_T < S_T$
C	0	$-S_T + M_T$
$-P$	$-S_T + M_T$	0
$-e^{-r_f(T-t)} S_t$	S_T	S_T
$e^{-r_d(T-t)} E_t(M_T)$	$-M_T$	$-M_T$
0	0	0

ここで、再び経済に“無リスクの裁定機会が存在しない”ことを仮定すればプット・コール・パリティの条件を得る。すなわち、タイプ 2 の幾何平均プット・オプションの理論価格は

$$P(t) = C(t) - e^{-r_f(T-t)} S_t$$

$$+ e^{-r_d(T-t)} M_t \exp(\mu_2 + \sigma_{22}/2) \quad (25)$$

で与えられる。

IV. 算術平均オプションの評価法

前節では幾何ブラウン運動 $\{S_t\}$ から計算される統計量 M_T と S_T の分布の性質について調べた。さて算術平均 Z_T の分布は厳密に求めることは困難であるが、なんらかの意味で幾何平均 M_T の分布と関係がないであろうか? 本節ではまずボラティリティー母数 σ が小さい場合には算術平均の分布はある極限分布を持つことを示す。実はこの極限分布は対数正規分布になることがわかるので、このことを利用すると幾何平均の分布を用いて算術平均の分布を近似することが考えられる。本節ではまず算術平均の極限分布を導き、これを利用して算術平均オプションの理論価格を計算する実際的方法を説明する。

1. 算術平均の漸近分布

期間 $0 \leq t \leq T$ における $\{S_t\}$ の算術平均 Z_T は(2)で与えられた。ここで $\alpha' = \alpha - \sigma^2/2$, $x_0 = \ln S_0$ とおけば(3)より標準ブラウン運動 $W(t)$ を用いて

$$x_t = \ln S_t$$

$$= x_0 + \alpha't + \sigma W(t) \quad (26)$$

と表すことができる。したがって

$$Z_T = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\{x_0 + \alpha's + \sigma W(s)\} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t}{T} Z_t + \frac{1}{T} \int_t^T \exp\{x_t + \alpha'(s-t) \\
&\quad + \sigma(W(s) - W(t))\} ds \\
&= \frac{t}{T} Z_t + S_t \frac{1}{T} \int_0^{T-t} \exp\{\alpha's + \sigma W(s)\} ds
\end{aligned} \tag{27}$$

と表すことができる。ここで σ が極めて小さいことを想定すると

$$\begin{aligned}
Z_T &= \frac{t}{T} Z_t + S_t \frac{1}{T} \int_0^{T-t} \exp(\alpha's) \{1 \\
&\quad + \sigma W(s) + o(\sigma)\} ds \\
&= \left(\frac{t}{T} Z_t + S_t \frac{1}{T} \int_0^{T-t} \exp(\alpha t) dt \right) \\
&\quad + \sigma \left(S_t \frac{1}{T} \int_0^{T-t} W(t) \exp(\alpha t) dt \right) + o(\sigma) \\
&= Z_T(0) + \sigma Z_T(1) + o(\sigma)
\end{aligned} \tag{28}$$

となる。以下では正当化が可能であるので形式的に高次の項 $o(\sigma)$ を無視することにしよう。ここで時刻 t までの履歴を条件とすると、 $\alpha \neq 0$ のとき右辺第1項は

$$\begin{aligned}
Z_T(0) &= \frac{t}{T} Z_t + S_t \left[\frac{\exp(\alpha s)}{\alpha T} \right]_0^{T-t} \\
&= \frac{t}{T} Z_t + S_t \left\{ \frac{\exp(\alpha(T-t)) - 1}{\alpha T} \right\}
\end{aligned} \tag{29}$$

となる。次に

$$Z_T(1) = \left(S_t \frac{1}{T} \right) \int_0^{T-t} W(s) \exp(\alpha s) ds \tag{30}$$

の分布を考えよう。フビニの定理を用いれば(30)の期待値は

$$\begin{aligned}
E_t(Z_T(1)) &= \left(S_t \frac{1}{T} \right) \int_0^{T-t} E[(W(s)) \\
&\quad \cdot \exp(\alpha s)] ds = 0
\end{aligned} \tag{31}$$

で与えられる。分散は

$$\begin{aligned}
V_t(Z_T(1)) &= \left(\frac{S_t}{T} \right)^2 E \left\{ \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} (W(s)W(s')) \right. \\
&\quad \left. \cdot \exp(\alpha(s+s')) \right\} ds ds'
\end{aligned} \tag{32}$$

となる。ここで再び $W(s) = W(s') + \{W(s) - W(s')\}$ と分解すれば任意の $s' < s$ に対して $W(s')$ と $\{W(s) - W(s')\}$ は独立であるので、フビニの定理を使って計算すると、 $\alpha \neq 0$ のときには

$$\begin{aligned}
V_t(Z_T(1)) &= \left(\frac{S_t}{T} \right)^2 \left\{ 2 \int_0^{T-t} \int_0^s s' \exp(\alpha(s \\
&\quad + s')) ds' ds \right\} \\
&= 2 \left(\frac{S_t}{T} \right)^2 \left\{ \int_0^{T-t} \exp(\alpha s) \left[\exp(\alpha s') \left(\frac{s'}{\alpha} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right]_0^s ds \right\} \\
&= \left(\frac{S_t}{T} \right)^2 \left\{ \frac{\tau \exp(2\alpha\tau)}{\alpha^2} - \frac{3(\exp(2\alpha\tau) - 1)}{2\alpha^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(\exp(\alpha\tau) - 1)}{\alpha^3} \right\}
\end{aligned} \tag{33}$$

となる。ただし $\tau = T - t$ である。また $\alpha = 0$ のときには(29)と(33)で形式的に $\alpha \rightarrow 0$ として展開した式と一致して、 $Z_T(0) = (t/T)Z_t + S_t$ 、 $V_t(Z_T(1)) = (S_t/T)^2(\tau^3/3)$ となることがわかる。ここで

$$\begin{aligned}
\ln(Z_T) &= \ln \left\{ (Z_T(0)) \left[1 + \sigma \frac{Z_T(1)}{Z_T(0)} + o(\sigma) \right] \right\} \\
&= \ln(Z_T(0)) + \sigma \left[\frac{Z_T(1)}{Z_T(0)} \right] + o(\sigma)
\end{aligned} \tag{34}$$

となることに注意すれば、算術平均 Z_T の漸近分布について次の命題が成立する。証明の概略を数学付録(ii)に与えた。

定理3: 区間 $0 \leq t \leq T$ における確率過程 $\{S_t\}$ の算術平均を Z_T とする。時刻 t を条件とする

$$\frac{1}{\sigma} (\ln(Z_T) - \ln(Z_T(0)))$$

の分布は $\sigma \rightarrow 0$ のとき漸近的に平均0、分散 $V(Z_T(1))/(Z_T(0))^2$ の正規分布に収束する。

この定理により $\ln(Z_T/Z_T(0))$ の分布を正規分布で近似することがある意味で正当化されることになる。このことは $(Z_T/Z_T(0))$ の分布としては対数正規分布によって近似できることをも意味している。したがって、算術平均オプションの理論価格を求める場合には Z_T の分布を幾何正規分布で近似して理論価格の近似値を求めることが考えられよう。

2. 算術平均のモーメントの性質

一般に幾何ブラウン運動の算術平均 Z_T の精密分布を求めることは困難であるが精密モーメント (exact moment) を求めることは可能である。 Z_T の n 次モーメントはフビニの定理を用いて

$$\begin{aligned} E(Z_T)^n &= \left(\frac{1}{T}\right)^n E\left\{\int_0^T S_t dt\right\}^n \\ &= n! \left(\frac{S_0}{T}\right)^n \left\{\int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} E(\exp(\sigma W(t_1) \right. \\ &\quad \left. + \sigma W(t_2) + \cdots + \sigma W(t_n)) \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp(\alpha'(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)) dt_1 dt_2 \cdots dt_n\right\} \end{aligned} \quad (35)$$

と表せる。ここでブラウン運動の差分を $x(t_i - t_{i-1}) = W(t_i) - W(t_{i-1})$ とおけば $x(t_i - t_{i-1})$ は互いに独立な正規分布 $N(0, t_i - t_{i-1})$ にしたがっている。ただし $t_0 = 0$ である。また

$$\begin{aligned} \exp\left\{\sum_{k=1}^n \left(k\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) + k^2 \frac{\sigma^2}{2}\right) (t_{n+1-k} - t_{n-k})\right\} \\ = \exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha + k\sigma^2) t_{n-k}\right\} \end{aligned} \quad (36)$$

となることに注意して式を変形すると

$$\begin{aligned} E(Z_T)^n &= n! \left(\frac{S_0}{T}\right)^n \left\{\int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} E(\exp(n\sigma x(t_1) \right. \\ &\quad \left. + (n-1)\sigma x(t_2 - t_1) + \cdots + \sigma x(t_n - t_{n-1})) \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp(\alpha'(t_1 + t_2 + \cdots + t_n)) dt_1 dt_2 \cdots dt_n\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= n! \left(\frac{S_0}{T}\right)^n \left\{\int_0^T \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k\sigma^2) t_{n-k}\right) dt_1 dt_2 \cdots dt_n\right\} \\ &= n! \left(\frac{S_0}{T}\right)^n \left\{\int_0^T \exp(\alpha t_n) \int_0^{t_n} \exp((\alpha \right. \\ &\quad \left. + \sigma^2) t_{n-1}) \int_0^{t_{n-1}} \cdots \int_0^{t_3} \exp((\alpha + (n \right. \\ &\quad \left. - 2)\sigma^2) t_2) \int_0^{t_2} \exp((\alpha + (n \right. \\ &\quad \left. - 1)\sigma^2) t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_n\right\} \end{aligned} \quad (37)$$

となる。ここで導いた一般公式を用いて $n = 1, 2, 3$ のモーメントを計算してみよう。 $n = 1$ のモーメントは (a) $\alpha \neq 0$ のときには

$$E(Z_T) = S_0 \left\{ \frac{\exp(\alpha T) - 1}{\alpha T} \right\} \quad (38)$$

(b) $\alpha = 0$ のときには $E(Z_T) = S_0$ となる。 $n = 2$ のモーメントはより複雑な場合分けが必要となる。(a) $\alpha \neq 0, \alpha + \sigma^2 \neq 0, 2\alpha + \sigma^2 \neq 0$ のときには

$$\begin{aligned} E(Z_T)^2 &= 2 \left(\frac{S_0}{T}\right)^2 \cdot \\ &\quad \left\{ \frac{\exp((2\alpha + \sigma^2) T) - 1}{(\alpha + \sigma^2)(2\alpha + \sigma^2)} - \frac{\exp(\alpha T) - 1}{\alpha(\alpha + \sigma^2)} \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

(b) $\alpha = 0, \alpha + \sigma^2 \neq 0, 2\alpha + \sigma^2 \neq 0$ のときには

$$E(Z_T)^2 = 2 \left(\frac{S_0}{T}\right)^2 \left\{ \frac{\exp(\sigma^2 T) - 1}{\sigma^4} - \frac{T}{\sigma^2} \right\} \quad (40)$$

(c) $\alpha \neq 0, \alpha + \sigma^2 \neq 0, 2\alpha + \sigma^2 = 0$ のときには

$$\begin{aligned} E(Z_T)^2 &= 2 \left(\frac{S_0}{T}\right)^2 \left\{ \frac{T}{(\alpha + \sigma^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\exp(\alpha T) - 1}{\alpha(\alpha + \sigma^2)} \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

(d) $\alpha \neq 0, \alpha + \sigma^2 = 0, 2\alpha + \sigma^2 \neq 0$ のときには

$$E(Z_T)^2 = 2 \left(\frac{S_0}{T} \right)^2 \left\{ \frac{T \exp(\alpha T)}{\alpha} - \frac{\exp(\alpha T) - 1}{\alpha^2} \right\} \quad (42)$$

となる。3次のモーメントはさらに煩雑になり、例えば $\alpha \neq 0$, $\alpha + \sigma^2 \neq 0$, $2\alpha + \sigma^2 \neq 0$, $2\alpha + 3\sigma^2 \neq 0$ のときには

$$E(Z_T)^3 = 6 \left(\frac{S_0}{T} \right)^3 \frac{1}{(\alpha + 2\sigma^2)} \cdot \left\{ \frac{\exp(3(\alpha + \sigma^2)T) - 1}{3(\alpha + \sigma^2)(2\alpha + 3\sigma^2)} - \frac{\exp(\alpha T) - 1}{\alpha(2\alpha + 3\sigma^2)} - \frac{\exp((2\alpha + \sigma^2)T) - 1}{(2\alpha + \sigma^2)(\alpha + \sigma^2)} + \frac{\exp(\alpha T) - 1}{\alpha(\alpha + \sigma^2)} \right\} \quad (43)$$

で与えられる。

次にここで算術平均について求めた厳密な (exact) 平均と分散を前節で求めた幾何平均の分布の期待値と分散とそれぞれ比較してみよう。幾何平均の期待値について

$$E(M_T) = S_0 \exp\left(\frac{\alpha T}{2} - \frac{\sigma^2 T}{12}\right) \leq S_0 \exp\left(\frac{\alpha T}{2}\right) \quad (44)$$

が成立することに注意すれば (38) 式より

$$E(Z_T) \geq E(M_T) \quad (45)$$

となることがわかる。すなわち算術平均の期待値は幾何平均の期待値よりも小さくない。分散については一般に複雑でこのような簡単な関係を見いだすことができない。そこでボラティリティ σ の小さいとき $V(M_T)$ を σ について展開すれば

$$V(M_T) = (S_0)^2 \exp\left(\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{6}\right)T\right) \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{3}\right) \right\} = \sigma^2 \left\{ \left(\frac{S_0}{3}\right)^2 \exp(\alpha T) \right\} + 0(\sigma^6) \quad (46)$$

となる。全く同様にして $\alpha \neq 0$ のときの $V(Z_T)$ を σ について展開すると

$$V(Z_T) = (S_0)^2 \{ m_2 \sigma^2 + m_4 \sigma^4 + 0(\sigma^6) \},$$

$$m_2 = \frac{T \exp(2\alpha T)}{\alpha^2} - \frac{3(\exp(2\alpha T) - 1)}{2\alpha^3} + \frac{2(\exp(\alpha T) - 1)}{\alpha^3},$$

$$m_4 = \frac{7(\exp(2\alpha T) - 1)}{4\alpha^4} - \frac{3T \exp(2\alpha T)}{2\alpha^3} + \frac{T^2 \exp(2\alpha T)}{2\alpha^2} - \frac{2(\exp(\alpha T) - 1)}{\alpha^4} \quad (47)$$

によって与えられる。したがって、 σ が十分に小さければ平均の差に比べて分散の差は十分小さくなるのがわかる。 $\alpha = 0$ のときにも同様なことが確認できる。

3. 算術平均分布の近似法

平均オプション契約が実務的に利用されている外国為替市場ではこのところ日々のデータから推定されるボラティリティ母数の値 σ は 8% - 15% の範囲で推移している。このような状況においては σ が小さい場合の近似法の現実妥当性は大きいように考えられる。そこで漸近理論により求められた漸近分布による算術平均オプション契約の価格評価を考えよう。ここで定理 3 で求めた $\ln(Z_T)$ の漸近分布より $\ln(Z_T/Z_t)$ の条件付平均と条件付分散はそれぞれ

$$\mu_2^* = \ln(Z_T(0)/Z_t),$$

$$\sigma_{22}^* = \sigma^2 \{ V(Z_T(1))/Z_T(0)^2 \} \quad (48)$$

によって近似することが正当化できることに注目する。さらに $\alpha \neq 0$ のとき $\ln((Z_T)/(Z_t))$ と $\ln(S_T/S_t)$ の条件付共分散の近似値を求めれば

$$\text{Cov}_t(Z_T(1), \ln(S_T))$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma \left(\frac{S_t}{T} \right) E \left\{ \left(\int_0^{T-t} W(s) e^{as} ds \right) W(T-t) \right\} \\
&= \sigma \left(\frac{S_t}{T} \right) \left\{ \int_0^{T-t} E[W(s)W(T-t)] e^{as} ds \right\} \\
&= \sigma \left(\frac{S_t}{T} \right) \left\{ \int_0^{\tau} s e^{as} ds \right\} \\
&= \sigma \left(\frac{S_t}{T} \right) \left\{ \frac{\tau e^{a\tau}}{a} - \frac{(e^{a\tau} - 1)}{a^2} \right\} \quad (49)
\end{aligned}$$

となる。(ただし $\tau = T - t$ である。) したがって、(33) 及び定理 1 によって $\ln((Z_T)/(Z_t))$ と $\ln(S_T/S_t)$ の条件付相関係数の近似値 ρ^* は $\alpha \neq 0$ のとき

$$\rho^* = \frac{\text{Cov}_t(Z_T(1), S_T)}{\sqrt{V_t(Z_T(1))} \sqrt{V_t(\ln(S_T))}} \quad (50)$$

によって計算できる。また $\alpha = 0$ のときには形式的に $\alpha \rightarrow 0$ としたときの値、すなわち $\rho^* = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となることがわかる。そこで、以上で求めた漸近分布にもとづく近似値 μ_2^* , σ_{22}^* , ρ^* を母数として幾何平均オプション契約の理論価格を用いることが考えられる。これが本稿で提案する第 1 の近似法である。

次により実務的に適当と考えられる第 2 の近似方法を説明する。以下の議論では一般性を失うことなく $\alpha \neq 0$, $\alpha + \sigma^2 \neq 0$, $2\alpha + \sigma^2 \neq 0$ としておこう。前節では既に Z_T および (S_T, Z_T) の厳密分布を求めたが、厳密分布をそれぞれ M_T および (S_T, M_T) の分布を利用してより精度の良い近似を考えよう。ここで M_T の分布に現れる母数 α と σ を α^* と σ^* とおく。他方、 Z_T の分布に現れる母数 α と σ についてはそのままとしておく。このとき 2 つの統計量 M_T と Z_T の期待値と分散について

$$E_t(Z_T) = E_t(M_T), \quad V_t(Z_T) = V_t(M_T) \quad (51)$$

を満足するように母数 (α, σ) の関数として

(α^*, σ^*) を選ぶことができる。そこで、こうして求めた (α^*, σ^*) にもとづく M_T の分布と (S_T, M_T) の分布により Z_T の分布と (S_T, Z_T) の分布を近似することを考えよう。まず、 $\tau = T - t$ としておくと、 M_T と Z_T の厳密な条件付期待値はそれぞれ

$$\begin{aligned}
E_t(M_T) &= M_t^{t/T} S_t^{t/T} \exp \left\{ \alpha^* \frac{\tau^2}{2T} \right. \\
&\quad \left. + \sigma^{2*} \left(\frac{\tau^3}{6T^2} - \frac{\tau^2}{4T} \right) \right\} \quad (52)
\end{aligned}$$

$$E_t(Z_T) = \frac{t}{T} Z_t + \frac{S_t}{\alpha T} (\exp(a\tau) - 1) \quad (53)$$

と表わすことができる。そこで

$$c_1 = \ln E_t(Z_T) - \ln(M_t^{t/T} S_t^{t/T}) \quad (54)$$

とおけば、条件 $E_t(Z_T) = E_t(M_T)$ から

$$\alpha^* \frac{\tau^2}{2T} = c_1 - \sigma^{2*} \left(\frac{\tau^3}{6T^2} - \frac{\tau^2}{4T} \right) \quad (55)$$

となる。同様にして M_T と Z_T の条件付分散はそれぞれ

$$\begin{aligned}
V_t(M_T) &= M_t^{2t/T} S_t^{2t/T} \exp \left(\alpha \frac{\tau^2}{T} \right) \\
&\quad \cdot \left\{ \exp \left[\frac{2\tau^3}{3T^2} - \frac{\tau^2}{2T} \right] \sigma^{2*} - \exp \left[\frac{\tau^3}{3T^2} - \frac{\tau^2}{2T} \right] \sigma^{2*} \right\} \quad (56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_t(Z_T) &= \left(\frac{S_t}{T} \right)^2 \left\{ \frac{2}{(\alpha + \sigma^2)} \cdot \right. \\
&\quad \left[\frac{\exp(2\alpha + \sigma^2)\tau - 1}{(2\alpha + \sigma^2)} - \frac{\exp(a\tau) - 1}{\alpha} \right] \\
&\quad \left. - \left(\frac{\exp(a\tau) - 1}{\alpha} \right)^2 \right\} \quad (57)
\end{aligned}$$

で与えられる。また、

$$c_2 = V_t(Z_T)/S_t^2 \quad (58)$$

とおけば条件 $V_t(Z_T) = V_t(M_T)$ から

$$\sigma^{2*} = \frac{3T^2}{\tau^3} \ln \left\{ c_2 e^{-2c_1} \left(\frac{M_t}{S_t} \right)^{-2t/T} + 1 \right\} \quad (59)$$

$$\alpha^* = \frac{2T}{\tau^2} \left\{ c_1 + \left(\frac{\tau^2}{4T} - \frac{\tau^3}{6T^2} \right) \sigma^{2*} \right\} \quad (60)$$

となることがわかる。そこで、(59) と (60) で求めた σ^{2*} と α^* を用いて M_T 及び (S_T, M_T) の分布に対するオプション公式に現れる母数 μ_2 と σ_2^2 に置き換えるのがここで提案する第 2 の近似法である。

ここで (α, σ^2) を母数とする S_T と (α^*, σ^{2*}) を母数とする M_T の相関係数を ρ^* とすれば

$$\begin{aligned} \text{cov}\left(\frac{1}{T} \int_t^T \ln S^*(s) ds, \ln S(T)\right) \\ = \frac{1}{T} E\left(\sigma^* \int_0^{T-t} W(s) ds, \sigma W(T-t)\right) \\ = \frac{\sigma^* \sigma}{2T} (T-t)^2 \end{aligned} \quad (61)$$

で与えられる。したがって、この近似法において用いられる条件付相関係数は

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\sigma^* \sigma (T-t)^2 / (2T)}{(\sigma^* (T-t)^{3/2} / T \sqrt{3}) \sigma (T-t)^{1/2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (62)$$

となり、もとの確率過程における ρ に一致することがわかる。

4. 算術平均オプション価格の計算法

算術平均の分布を幾何平均の厳密な平均と分散に一致させる近似方法を用いると、算術平均オプション契約の近似価格を簡単に求めることができる。具体的には幾何平均についてのドリフト項母数 α^* とボラティリティー母数 σ^* をもとにして幾何平均オプションの理論価格式に表れる母数 μ_2, σ_2, ρ の推定値などを求める。次にこれらの値を幾何平均オプションの価格式に代入することによって算術平均オプション価格の近似値を求めるのである。以上で説明した方法を実際の数値例を用いて実行してみた。ここで

$$\begin{aligned} S_0 &= 150.00, T = 1, r_d = 7\%, r_f = 9\%, \\ K &= 150, \sigma = 10\% \end{aligned}$$

表 4

平均回数	5	10	80	126	252
コール (コンボリューション)	2.8997 2.8923	2.7264 2.7198	2.5734 2.5597	2.5654 2.5539	2.5584 2.5407
プット (コンボリューション)	4.5658 4.5551	4.2542 4.2503	3.9801 3.9566	3.9657 3.9242	3.9532 3.8927

などの数値を前提としてオプション価格を計算した。表 4 はタイプ 1 のコール・オプションとプット・オプションのプレミアムを離散近似して計算した結果を示したものである。

ここでコンボリューションとは畳み込み法による数値計算の結果であるが、近似計算と比較する為に示しておいた。この数値計算例から明らかかなようにこの近似計算法と畳み込み法によるプレミアムの数値は極めて類似している。ただし実際の畳み込み計算では連続時間モデルを離散時間モデルで近似していることに注意しておこう。この表 4 において特に、平均をとる回数が 5 回、10 回とあまり多くない場合には誤差は 1% 以下となっている。また平均をとる回数が多い場合には多少数値が異なる。これは I に述べたようにこの場合には畳み込み法の信頼性に若干の疑問があることを考え合わせれば、ここで提案する幾何平均近似法が有効であることを否定するものではないと考えられる。

最後にここで我々の提案する評価法について以下のことを注意しておこう。我々は算術平均の分布を幾何平均の分布で近似する場合には権利行使価格時点に極めて近くなると近似の精度が多少落ちることが予想される。これは t が T に近くなると確率 1 で (45) が成立する影響が大きくなる為である。したがって、理論的には権利行使時刻の付近では定理 3 で導いた漸近分布を直接用いた第 1 の近似法を考える必要がある。ただし、我々が行ったシミュレーションによれば、ヘッジ・ポートフォリオを作るなどの

実用的観点から見る限り本稿で提案する第2の近似評価法によって十分に計算精度が保証されるとの結論を得ている。

5. ボラティリティーの推定

現実のデータから以上で説明したオプション価格の理論価格を求める場合にはボラティリティー母数 σ を推定する必要がある。オプション理論では母数 σ の推定方法としては原資産価格の対数変化率から計算された標本分散を用いる方法がヒストリカル・ボラティリティーとして知られている。その他、最近 Kunitomo [10] は毎日観察される高値と安値を用いる Parkinson 法をさらに改良した方法を提案している。この推定方法を平均オプションの評価に応用することも考えられよう。

V. ヘッジ・ポートフォリオ

これまで本稿で考察してきた平均オプション契約が実際に市場においてヘッジ可能であろうか。以下では外国為替市場の場合にも標準的論法を用いると容易にヘッジ・ポートフォリオを構成できることを示しておこう。まず通貨の場合には外国金利を $r_f(t)$ 、自国金利を $r_d(t)$ で表わすものとする。さらに前節までの仮定よりも一般的に、原資産価格 $\{S(t)\}$ が伊藤過程

$$dS = \alpha(t, S) S dt + \sigma(t, S) S dW \quad (63)$$

にしたがっているとしよう。ここで算術平均 Z_t に対して $Z_t^* = TZ_t$ とおけば

$$dZ_t^* = S dt \quad (64)$$

となるので確率過程 $\{Z_t^*\}$ は局所的に不確実性が存在しない (locally deterministic) ことになる。次に $\{Z_t^*\}$ に対する平均オプション価格を

$C(S, t)$ と置き、ヘッジ・ポートフォリオとして $n (= Cs)$ 単位の通貨 S と $V - nS$ 単位の安全資産からなる V を考えよう。このとき自己充足的 (self-financing) 戦略の下では V の変化は

$$\begin{aligned} dV &= n dS + (V - nS) r_d dt + n S r_f dt \\ &= n \{ \alpha S dt + \sigma S dW \} + (V - nS) r_d dt \\ &\quad + n S r_f dt \\ &= \{ C_s \alpha S + C_s r_f S + (V - C_s S) r_d \} dt \\ &\quad + \sigma S C_s dW \end{aligned} \quad (65)$$

である。一方、オプション価格 $C = C(S, Z_t^*, t)$ に対して伊藤の補題を用いれば

$$\begin{aligned} dC &= \{ \alpha S C_s + (1/2) \sigma^2 S^2 C_{ss} + S C_z^* \\ &\quad + C_t \} dt + \sigma S C_s dW \end{aligned} \quad (66)$$

となる。したがって、(65) と (66) から偏微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{ss} + (r_d - r_f) S C_s + S C_z^* + C_t \\ - r_d C = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

を得る。ここで $r_d - r_f$ と r_d をともに一定値 r であり、また (63) を幾何ブラウン運動と特定化すればこの偏微分方程式は Bergman [2] が導いた (18) 式及び Ingersoll [7] の (60a) 式に一致する。したがって、タイプ1のコール・オプションを例にとれば、オプション契約の理論価格は境界条件

$$\left\{ \begin{aligned} &C(S_T, Z_T^*, T) \\ &= \max \{ (1/T) Z_T^* - K, 0 \}, \\ &C(0, Z_t^*, t) \\ &= \max \{ e^{-r_d(T-t)} ((1/T) Z_t^* - K), 0 \}, \\ &C_s(\infty, Z_t^*, t) = ((T-t)/T) e^{-r_d(T-t)}, \\ &C(S_t, TK, t) \\ &= (1/(Tr_d)) (1 - e^{-r_d(T-t)}) e^{-r_f(T-t)} S_t \end{aligned} \right. \quad (68)$$

の下での (67) の解に対応することがわかる。

(詳しくは例えば Kemna=Vorst [9] を参照。) さらに、この解は Feynman=Kac の方程式を用いることによりリスク中立化法による理論価格と同一であることを示すことができよう。しかしながら、こうした算術平均オプション契約の場合には、偏微分方程式の解の解析的表現を求めることが困難である。したがって、数値計算上の大きな問題が生じるので実用的な観点からはなお問題が残るであろう。

VI. 結 語

本稿では幾何平均オプション価格を利用する算術平均オプション価格の新しい評価法を説明した。本稿で提案した方法は幾何平均近似法とも呼ぶことができようが、この方法はこれまでに提案されている数値計算方法、例えば畳み込み法などと比較すると最終的なオプション公式が明示的に与えられるので計算が比較的簡単であり、必要な計算時間も短い。さらに、本稿では新しい一つの漸近理論を用いてボラティリティー母数 σ がゼロに近づくとき極限では近似価格が真の価格に一致することを示した。この漸近理論は現実にボラティリティー母数があり大きくない場合には幾何平均近似法の精度のある程度保証してくれる。また、この理論的分析を踏まえより実用的と思われるオプション価格の評価法についても説明を加えた。以上のような理論的結果および我々が行った近似法についての若干の数値シミュレーションの結果から判断する限り本稿で提案した幾何平均近似法は実務的にも有用であるように考えられる。

ところで、前節で提案した方法はこれまでの数値計算法と異なりオプションの近似価格が明示的に得られるので実はより広い応用を考慮することができる。算術平均の関数として表現され

るペイ・オフを持つオプション契約、例えば停止条件付オプションや開始条件付オプションなどより複雑なオプション契約の理論価格を求めることも不可能でないであろう。他方、このような算術平均に基づくオプションの応用を既存の畳み込み法などによって実現することはきわめて困難であろう。

最後にここで用いたこの漸近理論に触れておく。この理論は筆者の一人が全く別の脈絡で用いた小分散理論あるいは small- σ 理論 (Kunitomo et al. [11]) と呼ばれている理論に関係している。いまの所、ファイナンスにおいてこのような漸近理論を応用した研究は皆無であるが将来において一つの有力な分析方法を与えているように思われる。

数 学 付 録

(i) 補題 2 の証明

変数変換 $u = x_1 - bx_2$, $v = x_2$ を考える。変換のヤコビアンは 1 であるので $x = (u + bv, v)$ を代入すると

$$\begin{aligned} & \iint_{(1,-b)x \geq c} e^{a'x} n_2(x | \mu, \Sigma) dx \\ &= \exp(a'\mu + a'\Sigma a/2) \iint_{(1,-b)x \geq c} n_2(x | \mu \\ & \quad + \Sigma a, \Sigma) dx \\ &= \exp(a'\mu + a'\Sigma a/2) \int_{u \geq c} \int_{-\infty}^{+\infty} n_2(u \\ & \quad + bv, v | \mu^*, \Sigma) du dv \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

と書ける。ただし $\mu^{*'} = (\mu_1^*, \mu_2^*) = \mu + \Sigma a$ とおいた。ここで

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u + bv \\ v \end{pmatrix} - \mu^* &= \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} (v - \mu_2^*) \\ & \quad + \begin{pmatrix} u - (1, -b)\mu^* \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

と書き換えられることに注意すると、正規分布の密度関数の指数部分は

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{pmatrix} u + bv \\ v \end{pmatrix} - \mu^* \right]' \Sigma^{-1} \left[\begin{pmatrix} u + bv \\ v \end{pmatrix} - \mu^* \right] \\
& = (b, 1) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ (v - \mu_2^*) \right. \\
& \quad \left. + \frac{(b, 1) \Sigma^{-1} (1, 0)'}{(b, 1) \Sigma^{-1} (b, 1)'} [u - (1, -b) \mu^*] \right\}^2 \\
& \quad + \left[(1, 0) \Sigma^{-1} (1, 0)' - \frac{((b, 1) \Sigma^{-1} (1, 0)')^2}{(b, 1) \Sigma^{-1} (b, 1)'} \right] \\
& \quad \cdot [u - (1, -b) \mu^*]^2 \quad (A.3)
\end{aligned}$$

である。したがって、 v について積分を行うと

$$\begin{aligned}
& \int_{u \geq c} \int_{-\infty}^{+\infty} n_2(u + bv, v | \mu^*, \Sigma) du dv \\
& = k_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \int_{u \geq c} \exp \left\{ -\frac{1}{2} k_2 [u \right. \\
& \quad \left. - (1, -b) \mu^*]^2 \right\} du \quad (A.4)
\end{aligned}$$

となる。ただし

$$k_1 = |\Sigma|^{-1/2} [(b, 1) \Sigma^{-1} (b, 1)']^{-1/2},$$

$$\begin{aligned}
k_2 = & \left[(1, 0) \Sigma^{-1} (1, 0)' \right. \\
& \left. - \frac{((b, 1) \Sigma^{-1} (1, 0)')^2}{(b, 1) \Sigma^{-1} (b, 1)'} \right]
\end{aligned}$$

である。そこで変数変換 $w = \sqrt{k_2} [u - (1, -b) \mu^*]$ を行って積分を計算し、さらに

$$|\Sigma| [(b, 1) \Sigma^{-1} (b, 1)'] k_2 = 1 \quad (A.5)$$

となることに注意すれば (A.4) の積分は

$$\Phi \left[\frac{(1, -b)' (\mu + \Sigma a) - c}{\sqrt{(1, -b)' \Sigma (1, -b)}} \right]$$

に一致する。□

(ii) 定理 3 の証明の概略

簡単化の為に $T = 1$ とおき

$$\int_0^1 e^{at} W(t) dt \quad (A.6)$$

が正規分布にしたがうことを示す。確率積分の構成から平均 0, 分散 $1/n$ の互いに無相関な確率変数列 $\{\xi_j, j = 1, \dots, n\}$ を用いて

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 e^{at} W(t) dt \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^n e^{a(i/n)} \left\{ \sum_{j=1}^i \frac{1}{\sqrt{n}} (\sqrt{n} \xi_j) \right\} \quad (A.7)
\end{aligned}$$

と書ける。ここで

$$a_j = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n e^{a(i/n)} \quad (A.8)$$

とおけば (A.7) は

$$\int_0^1 e^{at} W(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sum_{j=1}^n a_j (\sqrt{n} \xi_j) \quad (A.9)$$

と表現される。ここで右辺の各項の期待値はゼロであるから中心極限定理を適用できることになる。さらに $\eta_j = a_j (\sqrt{n} \xi_j)$,

$$S_n = \sum_{j=1}^n \text{Var}(\eta_j) \quad (A.10)$$

とおけば、2つの条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) \max_{1 \leq j \leq n} \text{Var}(\eta_j) = 0 \quad (A.11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) S_n = c \text{ (一定)} \quad (A.12)$$

を満たせばリンドバーク条件下の中心極限定理 (例えば Anderson = Kunitomo [1] 定理 1 を参照) を適用することができる。系列 $\{a_j\}$ からこれら 2つの条件を満足することは容易にわかる。□

投稿受付 1991 年 3 月 7 日 ; 最終稿受理 同年 5 月 15 日。

[引用文献]

- [1] Anderson, T.W. and N. Kunitomo, "Asymptotic Robustness in Regression and Autoregression Based on Lindeberge Conditions," Discussion Paper No.89-F-10, Faculty of Economics, University of Tokyo, *Journal of Multivariate Analysis*, forthcoming (近刊).
- [2] Bergman, Y. Z., "Pricing Path Contingent Claims," *Research in Finance*, Vol. 5, 1985, 229-241.

- [3] Carverhill, A. and L. J. Clewlow, "Valuing Average Rate ("Asian") Options," Unpublished Discussion Paper, University of Warwick, 1990.
- [4] Cox, J. C. and S. A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, 1976, 145-166.
- [5] Goldman, M. B., H. B. Sosin, and M. A. Gatto, "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High," *Journal of Finance*, Vol. 34, 1979, 1111-1127.
- [6] Ikeda, N. and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, Second Edition, North-Holland, 1989.
- [7] Ingersoll, J. E., *Theory of Financial Decision Making*, Rowman & Littlefield Publishers, 1987.
- [8] Harrison, J. M. and D. Kreps, "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, 1979, 381-408.
- [9] Kemna, A. G. Z. and A. C. F. Vorst, "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values," *Journal of Banking and Finance*, Vol. 14, 1990, 113-129.
- [10] Kunitomo, N., "Improving the Parkinson Method of Estimating Security Price Volatilities," Discussion Paper No. 90-F-16, Faculty of Economics, University of Tokyo, *Journal of Business*, forthcoming (近刊).
- [11] Kunitomo, N., K. Morimune and Y. Tsukuda, "Asymptotic Expansions of the Distributions of the Test Statistics for Over-identifying Restrictions in a System of Simultaneous Equations," *International Economic Review*, Vol. 24, No. 1, 1983, 199-215.