べき乗変換モデルにおける一致性を有する推定量について

東京大学大学院工学系研究科技術経営戦略学専攻
〒113-8656　文京区本郷
縄田和満
e-mail: nawata@tmi.t.u-tokyo.ac.jp

概要
Box-Cox 変換モデルは，各種分野において幅広く使われているモデルである。モデルの推定には，誤差項の分布に正規分布を仮定した最尤推定量が用いられる。しかしながら，Box-Cox 変換モデルでは，変換パラメータが 0 以外の場合，誤差項の分布は正規分布となることが出来ないため，この最尤推定量は一致推定量とはならない。この論文では，（Box-Cox 変換モデルの変換パラメータ 0 の場合を除く）べき乗変換モデルの新たな推定量を提案し，その一致性および漸近正規性を証明する。また，モンテカルロ実験の結果を示す。

A consistent estimator of the power transformation model

Kazumitsu Nawata

Graduate School of Engineering, University of Tokyo
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-856, Japan
fax: +81-3-5841-8832

Abstract

The Box-Cox model is widely used in various fields. The model is estimated by the maximum likelihood estimator under the normality assumption of error terms. However, since the error terms cannot be normally distributed except the case where the transformation parameter is zero, it is not a proper estimator. In this paper, I propose a new estimator of the power transformation model (the Box-Cox transformation model excluding the case in which the transformation parameter is zero). Consistency and asymptotic normality of the estimator are proved. The results of Monte Carlo experiments are also presented.

Keywords：　Box-Cox transformation, power transformation,　consistent estimator, moment condition

1. はじめに

Box-Cox (1964) 変換モデル (以後, BCモデルと略す) は, 各種のデータ分析において幅広く使われているモデルである。(応用例に関しては, Larson (1993), Machado and Mata (2000), Chen (2002), Yang and Tsui (2004), Giannakas, Tran, and Tzouvelekas (2003), Okunade, Karakus, and Okeke (2004), and Chaze (2005)などを参照せよ。)推定には, 通常, 誤差項の分布に正規分布を仮定した最尤推定量 (以後, BC MLEと略す) が用いられる。しかしながら, BCモデルでは, 誤差項の分布は, (変換パラメータ0の場合以外は) 正規分布とすることができない。このため, 正規性を仮定した尤度関数は正しく設定されておらず, BC MLEは一致推定量とはならない。正規分布以外の分布を考えた推定量やその他の変換も提案されているが(Perior (1978), Amemiya and Powell (1981), Yeo and Johnson (2000) and Yang (2006)), モデルの簡便性が失われることや (Showalter, 1994)変換の意味が不明確になるためこれらの方法はほとんど使われていない。

一方, 縄田・川渕(2012)は, (BCモデルにおける変換パラメータ0の場合を除く) べき乗変換モデルの新しい推定量の可能性を示した。この論文では, それに基づき, べき乗変換モデル推定量を新たに提案する。推定量は, 推定量はBC最尤推定量を修正したもので, 一致推定量となる。ここでは, 推定量の漸近分布を求め, さらに, モンテカルロ・シミュレーションの結果を示した。

1. モデルおよび推定量

ここでは, べき乗変換モデル

$$z_t = x_t'\beta + u_t, \qquad z_t = y_t^{\lambda}, \qquad y_t \ge 0, \qquad t = 1,2,\ldots,T, \tag{1}$$

を考える。ここで, x_t および β はk次元の説明変数および未知のパラメータのベクトル, λ は変換パラメータである。$\{u_t\}$ は独立同一分布に従う確率変数であり, 分布のサポートに下限が存在し, 1次および3次のモーメントが0である (すなわち, $f(u)$ は確率密度関数とすると, あるに対して $f(u)=0,\ \ u \le -a$ となる $a>0$ が存在し, $E(u_t)=E(u_t^3)=0$) であるとする。 また, $\{x_t\}$ は独立同一分布に従う確率変数で, $\{u_t\}$ と $\{x_t\}$ は独立であるとする。また, $\{u_t\}$ は6次のモーメント, $\{x_t\}$ は3次のモーメントが存在する。 x_t の分布および β のパラメータ・スペースは, $\inf_{x_t}(x_t'\beta_0)-a>0$ (β_0 は β の真の値)および $\inf_{x_t,\beta}(x_t'\beta)>c>0$ を満足するものとする。誤差項に正規分布を仮定した場合と異なり, この仮定のもとでは $y_t>0$ であり, 矛盾のないモデルを得ることができる。($(y_t^{\lambda}-1)/\lambda = x_t^{*}{}'\beta^{*}+v_t$, $v_t = u_t/\lambda$ とすると, BC モデルを得ることができるが, 推定量の漸近分布を求めるため $\lambda>0$ のケースのみを考え, $\lambda=0$ の場合は考慮しない。このため, このモデルをBCモデルでなく, べき乗変換モデルと呼ぶ。)

$\theta' = (\lambda, \beta', \sigma^2)$ とすると, 尤度関数は

$$\log L(\theta)=\sum_t\left[\log\phi\{(z_t-x_t'\beta)/\sigma\}-\log\sigma\right]+\sum_t\{\log\lambda+(\lambda-1)\log y_t\},\tag{2}$$

となる。ここで，ϕ は標準正規分布の確率密度関数，σ^2 は u_t の分散である。 BC MLE は

$$\frac{\partial\log L}{\partial\lambda}=0,\qquad \frac{\partial\log L}{\partial\beta}=0,\qquad \frac{\partial\log L}{\partial\sigma^2}=0\tag{3}$$

から求められる。ここで， $\theta_0'=(\lambda_0,\beta_0',\sigma_0^2)$ を θ の真のパラメータ値とすると，

$E[\frac{\partial\log L}{\partial\lambda}|_{\theta_0}]\neq 0,$ であるから， BC MLE は一致推定量とはならない。

ここで， $\partial\log L/\partial\lambda$, の代わりに，

$$G_T(\theta)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_t(z_t-x_t'\beta)\{\log(x_t'\beta)+\frac{z_t-x_t'\beta}{x_t'\beta}\}z_t+\sum_t\{\log(x_t'\beta)+\frac{z_t-x_t'\beta}{x_t'\beta}\}+n\tag{4}$$

$$=\sum_t g_t(\theta),$$

$$g_t(\theta)=-\frac{1}{\sigma^2}(z_t-x_t'\beta)\{\log(x_t'\beta)+\frac{z_t-x_t'\beta}{x_t'\beta}\}z_t+\log(x_t'\beta)+\frac{z_t-x_t'\beta}{x_t'\beta}+1.$$

とし，

$$G_T(\theta)=0,\quad \frac{\partial\log L}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\log L}{\partial\sigma^2}=0\tag{5}$$

の根を考える。$G(\theta)$ は，付章 A に示すように $\partial\log L/\partial\lambda$ の近似から求められる。BC MLE の場合とこのとなり，(5)式から得られる推定量は一致推定量となり，次の定理を得ることができる。

<u>定理 1</u>

(5)式の根の中に一致推定量となるものが存在する。

証明は付章 B の通りである。ここで， $\hat{\theta}'=(\hat{\lambda},\hat{\beta}',\hat{\sigma}^2)$ を一致推定量とすると，$\hat{\theta}$ の漸近分布は次の定理で与えられる。

<u>定理 2</u>

$\hat{\theta}$ の漸近分布は以下の通りである。

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta_0)\to N[0,A^{-1}B(A')^{-1}],\tag{6}$$

$$A=-E[\frac{\partial\ell_t(\theta)}{\partial\theta'}|_{\theta_0}],$$

$$B=E[\ell_t(\theta_0)\ell_t(\theta_o)'],\qquad \ell_t(\theta)=\begin{bmatrix}g_t(\theta)\\ \xi_t(\theta)\\ \varsigma_t(\theta)\end{bmatrix},\quad \xi_t(\theta)=\frac{1}{\sigma^2}x_t(z_t-x_t'\beta),$$

$$\varsigma_t(\theta)=\frac{(z_t-x_t'\beta)^2-\sigma^2}{2\sigma^4}.$$

［証明］

ここで

$$\ell(\theta)=\sum_t \ell_t(\theta)=\begin{bmatrix} G_T(\theta) \\ \dfrac{\partial \log L}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

とすると

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta_0)=-[\frac{1}{T}\frac{\partial \ell}{\partial \theta'}|_{\theta^*}]^{-1}\frac{1}{\sqrt{T}}\ell(\theta_0), \tag{8}$$

である。 θ^* は $\hat{\theta}$ と θ_0 の間の値である。ここで，

$$\ell_t(\theta_0)=\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{\sigma_0^2}[x_t'\beta_0\log(x_t'\beta_0)u_t+\{1+\log(x_t'\beta_0)\}u_t^2+\dfrac{u_t^3}{x_t'\beta_0}]+\log(x_t'\beta_0)+\dfrac{u_t}{x_t'\beta_0}+1 \\ \dfrac{1}{\sigma_0^2}x_t u_t \\ \dfrac{u_t^2-\sigma^2}{2\sigma_0^4} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

であるから， $E[\ell_t(\theta_0)]=0.$ となる。$\{\ell_t(\theta_0)\}$ は独立同一分布に従う確率変数であるから，中心極限定理により，

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\ell(\theta_0)\to N(0,B), \tag{10}$$

$\partial\ell/\partial\theta$ のすべての要素は微分可能であるから，Amemiya (1985, pp.112-113)の Theorem 4.1.4 により，

$$-\frac{1}{T}\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta'}|_{\theta^*}\xrightarrow{P}A, \tag{11}$$

となる。Amemiya (1985, p.111)の Theorem 4.1.3 により，$\hat{\theta}$ の漸近分布は，(6)式の通りとなる。行列 A および B の詳細は，付章 C の通りである。

すでに述べたように，一般的には，BC MLE は一致推定量とはならない。しかしながら，$\sigma_0/x_i'\beta_0\to 0$ である場合 (Bickel and Doksum (1981)は，これを”small σ”，その場合の漸近的な性質を”small σ asymptotics”と呼んでいる)，$\hat{\theta}_{BC}$ は通常の最尤推定量となり，モデルの推定に使うことができるが，”small σ”の検定は付章 D に示す方法で行うことができる。

2. モンテカルロ・シミュレーション

ここでは，BC　MLE と新たに提案された推定量のモンテカルロ・シミュレーションの結果を示す。モデルは

$$z_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t\,,\ z_t = y_t^{\lambda},\quad y_t \geq 0,\qquad t = 1,2,\ldots,T. \tag{12}$$

で与えられているとする。モンテカルロ・シミュレーションでは次の項目を考慮した。

i）変換パラメータλの影響。 0.8, 0.5 および 0.2 の場合を考慮した。

ii）標本の大きさ Tの影響。50, 100 および 200 の場合を考慮した。

$\{x_t\}$ は(0, 10)の一様分布，$\{u_t\}$ は (-5, 5)の一様分布とした。真のパラメータ値は，

$$\beta_0 = 5.0 \quad および \quad \beta_0 = 0.1. \tag{13}$$

とし，各ケースにおいて 1,000 回の繰り返しを行った。

λ が与えられた場合，β および σ^2 は，最小二乗法で与えられる。BC MLE および新規推定量は，次の方法（Nawata (1994) and Nawata and Nagase (1996)）によって求めた。

i）　$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n$ を 0.01 から 2.0 まで 0.01 の間隔で選ぶ。

ii）　$\hat{\beta}_0(\lambda), \hat{\beta}_1(\lambda)$ および $\hat{\sigma}(\lambda)^2$ をそれぞれの λ について最小二乗法によって推定する。

iii）　BC MLE に関しては (3)式の尤度関数を最大にする $\hat{\lambda}_{BC_1}$ を，新規推定量に関しては，

$G_T(\theta_i)\cdot G_T(\theta_{i+1}) < 0$，$\theta_i' = (\lambda_i, \hat{\beta}_0(\lambda), \hat{\beta}_1(\lambda), \hat{\sigma}(\lambda)^2)$. となる $\hat{\lambda}_{N_1}$, を求める。

iv）　$\hat{\lambda}_{BC_1}$ および $\hat{\lambda}_{N_1}$ の近傍で 0.0001 の間隔で λ_i を選び，(ii) および (iii)を繰り返す。

v）　最終的な推定値を決定する。

新規に提案した推定量では，i)(5) の解が存在しない，ii)(5) に複数の解が存在する，といった可能性がある。しかしながら，これらの問題は生じず，すべてのケースにおいてただ一つの解が存在した。

結果は表1-3に示す通りである。BC MLE は，かなり大きな偏りを生じており，また，λ の推定値は真の値より小さくなっている。新規推定量の偏りは大幅に小さくなっている。特にλに関しては$T = 50$ においても偏りはほとんどなくなっており，新推定量はBC MLE を改良していることが認められた。

3. まとめ

BC モデルはいろいろな分野で幅広く使われており，その推定は BC MLE によって行われる。しかしながら，BC　MLE は一致推定量ではない。この論文では，(BC モデルの変換パラメータ 0 の場合を除く）べき乗変換モデルの新たな推定方法を提案した。推定量は BC　MLE を修正したもので，一致推定量となっており，その漸近分布を示した。推定量は最小二乗

法とスキャンニング法によって簡単に計算することができる。モンテカルロ・シミュレーションの結果からは，新規推定量は， BC MLE より優れた推定量であることが示された。しかしながら，推定量の優位性はモデルに依存する可能性がある。ここでの結果は，他のモデルでは異なる可能性があり，さらなる分析が必要であろう。

付章 A: $\partial\log L/\partial\lambda$ の近似について

ここで，

$$\frac{\partial\log L}{\partial\lambda}|_{\theta_0} = -\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_t \log(y_t)z_t^* u_t + \sum_t \log y_t + n/\lambda, \qquad z_t^* = y_t^{\lambda_0}. \tag{14}$$

であるから， $|\sigma_0/x_t'\beta_0|$ が小さい場合，

$$\log y_t = \frac{1}{\lambda_0}\log(x_t'\beta_0 + u_t) = \frac{1}{\lambda_0}\{\log(x_t'\beta_0) + \log(1+\frac{u_t}{x_t'\beta_0})\} \tag{15}$$

$$\approx \frac{1}{\lambda_0}\{\log(x_t'\beta_0) + \frac{u_t}{x_t'\beta_0}\}.$$

である。したがって， $\partial\log L/\partial\lambda$ を θ_0 で評価したものは，

$$\frac{\partial\log L}{\partial\lambda}|_{\theta_0} \approx -\frac{1}{\sigma_0^2\lambda_0}\sum_t [x_t'\beta_0\log(x_t'\beta_0)u_t + \{1+\log(x_t'\beta_0)\}u_t^2 + \frac{u_t^3}{x_t'\beta_0}] \tag{16}$$

$$+\frac{1}{\lambda_0}\sum_t\{\log(x_t'\beta_0) + \frac{u_t}{x_t'\beta_0}\} + n/\lambda_0 = \frac{1}{\lambda_0}G_T(\theta_0).$$

で近似される。

付章 B: 定理 1 の証明

通常の最尤推定量の場合とことなり，(5)式は関数を最大化する条件でない。 したがって， $G_T(\theta)=0$ が解を持たないが， $g(\theta)=0,\ g(\theta)=\underset{T\to\infty}{p\lim}G_T(\theta)/T$ が解を持つような場合を考慮しなければならない。例えば，$G_T(\theta)=T\cdot\theta'\theta+1$ とすると任意の θ に関して $G_T(\theta)\neq 0$ であるが $\theta=0$ では $g(\theta)=0$ となってしまう．ここでは，推定量の一致性を平均値の定理と中間値の定理を使って証明する。

λ が与えられた場合， β および σ^2 は最小二乗法によって求めることが出来る。 $\hat{\beta}(\lambda)$ および $\hat{\sigma}^2(\lambda)$ を最小二乗法による推定量とする。ここで，

$$h_T(\lambda) = \frac{1}{T}G_T\{\lambda, \hat{\beta}(\lambda), \hat{\sigma}(\lambda)^2\}, \qquad h(\lambda) = \underset{T\to\infty}{p\lim}\, h_T(\lambda). \tag{17}$$

とする。$\lambda=\lambda_0$，の場合，モデル通常の回帰モデルとなるから， $\hat{\beta}(\lambda_0)$ および $\hat{\sigma}(\lambda_0)^2$ は一致推定量となる。したがって，

$$h(\lambda_0) = \underset{T\to\infty}{p\lim}\frac{1}{T}G_T(\theta_0) = E[g_t(\theta_0)]. \qquad (18)$$

である。ここで

$$g_t(\theta_0) = -\frac{1}{\sigma_0^2}[x_t'\beta_0\log(x_t'\beta_0)u_t + \{1+\log(x_t'\beta_0)\}u_t^2 + \frac{u_t^3}{x_t'\beta_0}] + \log(x_t'\beta_0) + \frac{u_t}{x_t'\beta_0} + 1 \qquad (19)$$

であり， $E(u_t) = 0, E(u_t^2) = \sigma_0^2$ および $E(u_t^3) = 0,$ であるから

$$E[g_t(\theta_0)] = 0. \qquad (20)$$

となる。(18) 式および (20)式から

$$h(\lambda_0) = 0\,. \qquad (21)$$

となる。$h'(\lambda) = dh/d\lambda$ とすると， $h'(\lambda)$ は連続関数であるから， $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ であれば

$sign\{h'(\lambda)\} = sign\{h'(\lambda_0)\}$ および $|h'(\lambda)| \geq \gamma \equiv \frac{1}{2}|h'(\lambda_0)|$ となる $\delta > 0$ が存在する。(21) 式及び平均値の定理から任意の $\varepsilon \in (0,\delta)$ に対して

$$h(\lambda_0+\varepsilon) = h(\lambda_0+\varepsilon) - h(\lambda_0) = h'(\lambda^*)\varepsilon,\;\; h(\lambda_0-\varepsilon) = h(\lambda_0-\varepsilon) - h(\lambda_0) = -h'(\lambda^{**})\varepsilon \qquad (22)$$

となる。ここで， λ^* および λ^{**} は $[\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon]$ に含まれる値である。したがって，

$$sign\{h(\lambda_0-\varepsilon)\} \neq sign\{h(\lambda_0+\varepsilon)\},\;\; |h(\lambda_0-\varepsilon)| > \gamma\varepsilon,\;\; |h(\lambda_0+\varepsilon)| > \gamma\varepsilon. \qquad (23)$$

となる。 $h_T(\lambda_0-\varepsilon) \xrightarrow{P} h(\lambda_0-\varepsilon)$ および $h_T(\lambda_0+\varepsilon) \xrightarrow{P} h(\lambda_0+\varepsilon)$ であるから，

$$P\Big[\; sign\{h_T(\lambda_0-\varepsilon)\} \neq sign\{h_T(\lambda_0+\varepsilon)\}, |h_T(\lambda_0-\varepsilon)| > 0, \text{ and } |h_T(\lambda_0+\varepsilon)| > 0 \;\Big] \to 1. \qquad (24)$$

中間値の定理から $|h_T(\lambda_0-\varepsilon)| > 0,$ および $|h_T(\lambda_0+\varepsilon)| > 0.$ であれば $h_T(\lambda) = 0$ となる $\lambda \in [\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon]$ が存在する。したがって，

$$P[\;\; h_T(\hat{\lambda}) = 0 \text{ となる } \hat{\lambda} \in [\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon] \text{ が存在する }] \to 1. \qquad (25)$$

(25)式は すべての $\varepsilon \in (0,\delta)$, で成立するから， $h_T(\lambda) = 0$ には λ_0 の一致推定量となる解が存在する。 $\hat{\beta}(\hat{\lambda})$ および $\hat{\sigma}(\hat{\lambda})^2$ は最小二乗法によって求められるから，これらは $\hat{\lambda} \xrightarrow{P} \lambda_0$ の場合一致推定量となる。(5)式の解には一致推定量となるものが存在する。

付章 C: 行列 A , B

行列 A および B 以下の通りである。

$$A = -\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \qquad (26)$$

$$A_{11} = E[\frac{\partial g_t}{\partial \lambda}|_{\theta_0}] = E\left[-\frac{z_t^*\log(y_t)}{\sigma_0^2}[\{\log(x_t'\beta_0) + 2\frac{u_t}{x_t'\beta_0}\}z_t^* + \log(x_t'\beta_0)u_t + \frac{u_t^2}{x_t'\beta_0}] + \frac{z_t^*\log(y_t)}{x_t'\beta_0}\right],$$

$$A_{12} = E[\frac{\partial g_t}{\partial \beta'}|_{\theta_0}] = E[\{\frac{1}{\sigma_0^2}x_t'\beta_0\log(x_t'\beta_0) + \frac{1}{(x_t'\beta_0)^2}\}x_t'],$$

$$A_{13}=E[\frac{\partial g_t}{\partial \sigma^2}|_{\theta_0}]=\frac{1}{\sigma_0^2}\left[1+E[\log(x_t'\beta_0)]\right],\quad A_{21}=E[\frac{\partial \xi_t}{\partial \lambda}|_{\theta_0}]=\frac{1}{\sigma_0^2}E[z_t^*\log(y_t)x_t],$$

$$A_{22}=E[\frac{\partial \xi_t}{\partial \beta'}|_{\theta_0}]=-\frac{1}{\sigma_0^2}E[x_t x_t'],\quad A_{23}=A_{32}'=E[\frac{\partial \xi_t}{\partial \sigma^2}|_{\theta_0}]=E[\frac{\partial \varsigma_t}{\partial \beta}|_{\theta_0}]=0$$

$$A_{31}=E[\frac{\partial \varsigma_t}{\partial \lambda}|_{\theta_0}]=\frac{1}{\sigma_0^4}E[z_t^*\log(y_t)u_t],\quad A_{33}=E[\frac{\partial^2 \varsigma_t}{\partial \sigma^2}|_{\theta_0}]=-\frac{1}{2\sigma_0^4},\quad z_t^*=y_t^{\lambda_0}.$$

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}, \tag{27}$$

$$B_{11}=E[g_t(\theta_0)^2]=\frac{1}{\sigma_0^4}E\Big[\ \{x_t'\beta_0\log(x_t'\beta_0)\}^2\sigma_0^2-[1+4\log(x_t'\beta_0)+\{\log(x_t'\beta_0)\}^2]\sigma_0^4$$

$$+\frac{\sigma_0^6}{(x_t'\beta_0)^2}+[\{1+\log(x_t'\beta_0)\}^2\sigma_0^2+2\log(x_t'\beta_0)-\frac{2\sigma_0^2}{(x_t'\beta_0)^2}]M_4$$

$$+\frac{2\{1+\log(x_t'\beta_0)\}}{x_t'\beta_0}M_5+\frac{1}{(x_t'\beta_0)^2}M_6\ \Big]$$

$$B_{12}'=B_{21}=E[g_t(\theta_0)\xi_t(\theta_0)]=E[-\frac{x_t'\beta_0\log(x_t'\beta_0)}{\sigma_0^2}+\frac{1}{x_t'\beta_0}-\frac{M_4}{\sigma_0^4 x_t'\beta_0}]x_t$$

$$B_{13}=B_{31}=E[g_t(\theta_0)\varsigma_t(\theta_0)]=-\frac{1}{2\sigma_0^6}E[(M_4-\sigma_0^4)\{1+\log(x_t'\beta_0)\}+\frac{M_5}{x_t'\beta_0}]$$

$$B_{22}=E[\xi_t(\theta_0)\xi_t(\theta_0)']=\frac{1}{\sigma_0^2}E[x_t x_t'],\quad B_{23}=B_{32}'=E[\xi_t(\theta_0)\varsigma_t(\theta_0)]=0$$

$$B_{33}=E[\varsigma_t(\theta_0)^2]=\frac{M_4-\sigma_0^4}{4\sigma_0^8},\ M_4=E[u_t^4],\quad M_5=E[u_t^5],\quad M_6=E[u_t^6].$$

なお，B は $\hat{B}=\sum \ell_t(\hat{\theta})\ell_t(\theta)'$ から推定すること可能である。

付章 D:　BC MLE を使って良いかどうかの検定

ここでは，以下“Small σ”を仮定する。この場合，BC MLE $\hat{\theta}_{BC}'=(\hat{\lambda}_{BC},\hat{\beta}_{BC}',\hat{\sigma}_{BC}^2)$ の漸近分布は，

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{BC}-\theta_0)\to N(0,C^{-1}) \tag{28}$$

$$C=-E[\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta\partial\theta'}|_{\theta_0}]=-\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{11}=E[\frac{\partial^2\log L}{\partial\lambda^2}|_{\theta_0}]=-\frac{1}{\sigma_0^2}E[z_t(\log y_t)^2(z_t+u_t)]$$

$$C_{12}'=C_{21}=CE[\frac{\partial^2\log L}{\partial\lambda\partial\beta}|_{\theta_0}]=\frac{1}{\sigma_0^2}E[z_t(\log y_t)^2(z_t+u_t)]$$

$$C_{13}=C_{31}=E[\frac{\partial^2 \log L}{\partial\lambda\partial\sigma^2}|_{\theta_0}]=\frac{1}{\sigma_0^4}E[z_t(\log y_t)u_t]$$

$$C_{22}=E[\frac{\partial^2 \log L}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\theta_0}]=-\frac{1}{\sigma_0^2}E[x_t x_t']$$

$$C_{23}'=C_{32}=0$$

$$C_{33}=-\frac{1}{2\sigma_0^4}$$

で与えられ，$\hat{\theta}_{BC}$ を使うことが可能となる。

ここで，

$$A^*\equiv A^{-1},\qquad A^*=\begin{bmatrix}A_{11}^* & A_{12}^* & A_{13}^*\\ A_{21}^* & A_{22}^* & A_{23}^*\\ A_{31}^* & A_{32}^* & A_{33}^*\end{bmatrix} \tag{29}$$

$$C^*\equiv C^{-1},\qquad C^*=\begin{bmatrix}C_{11}^* & C_{12}^* & C_{13}^*\\ C_{21}^* & C_{22}^* & C_{23}^*\\ C_{31}^* & C_{32}^* & C_{33}^*\end{bmatrix}$$

とする。A_{ij}^*, C_{ij}^* は A_{ij}, C_{ij} に対応する位置にある行列の部分である。λ の新推定量を $\hat{\lambda}_N$ とすると，付章 A で示したように，“Small σ”では $G_T(\theta_0)=\frac{\partial \log L}{\partial\lambda}|_{\theta_0}$ であるから

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_N-\hat{\lambda}_{BC})\to N(0,d) \tag{30}$$

$$d=\underset{n\to\infty}{p\lim}\, nV(\hat{\lambda}_N-\hat{\lambda}_{BC})=(A_{11}^*-C_{11}^*)^2B_{11}+(A_{12}^*-C_{12}^*)B_{22}(A_{12}^*-C_{12}^*)'+(A_{13}^*-C_{13}^*)^2B_{33}$$
$$+2(A_{11}^*-C_{11}^*)(A_{12}^*-C_{12}^*)B_{12}'+2(A_{11}^*-C_{11}^*)(A_{13}^*-C_{13}^*)B_{13}$$

となる。d の推定量を $\hat{d}$ とすると，

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_N-\hat{\lambda}_{BC})/\sqrt{\hat{d}}\to N(0,1) \tag{31}$$

となり，これを使って”Small σ”の検定，すなわち，BC MLE を使って良いかどうかの検定を行うことが出来る。

謝辞

本研究は，独立行政法人日本学術振興会の科学研究費補助金（基盤研究（A），「大規模個票データを使った医療情報分析・政策評価の研究」，課題番号：20243016）の交付を受けて行ったものである。ここに記して感謝の意を表したい。

参考文献

[1] Amemiya, T ., 1985, *Advanced Econometrics*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

[2] Amemiya, T ., and J. L. Powell, 1981, “A Comparison of the Box-Cox Maximum Likelihood Estimator and the Non-Linear Two Stage Least Squares Estimator,”

Journal of Econometrics, 17, 351-381.
[3] Bickel, P. J. and K. A. Doksum, 1981, "An Analysis of Transformations Revisited," Journal of the American Statistical Association, 76, 296-311.
[4] Box, G. E. P., and D. R. Cox, 1964, "An Analysis of Transformation," *Journal of the Royal Statistical Society B*, 26, 211-252.
[5] Chaze, J. P., 2005, "Assessing Household Health Expenditure with Box-Cox Censoring Models," *Health Economics*, 14, 893-907.
[6] Giannakas K., K. C. Tran, and V. Tzouvelekas, 2003, "On the Choice of Functional Form in Stochastic Frontier Modeling," *Empirical Economics*, 28, 75-100.
[7] Larson, A. C., 1993, "A Convenient Test of Functional Form for Pooled Econometric Models," *Empirical Economics,* 18, 271-280.
[8] Machado, J. A. F., and J. Mata, 2000, "Box-Cox Quantile Regression and the Distribution of Firm Sizes," *Journal of Applied Econometrics*, 15, 253-274.
[9] Nawata, K. (1994) "Estimation of sample selection bias models by the maximum likelihood estimator and Heckman's two-step estimator," *Economic Letters*, 45, 33-40.
[10] Nawata, K., and Nagase, N. (1996) "Estimation of sample selection biases models," *Econometric Reviews*, 15, 387-400.
[11]縄田和満，川渕幸一（2012）「べき乗変換モデルの不均一分散下での推定について-糖尿病の在院日数の分析への応用-」『日本統計学会誌』2012，日本統計学会誌，Vol. 41, No.2, 319-335.
[12] Okunade, A. A., M. C. Karakus, and C. Okeke, 2004, "Determinants of Health Expenditure Growth of the OECD Countries: Jackknife Resampling Plan Estimates," *Health Care Management Science*, 7, 173-183.
[13] Poirier, D. J., 1978, "The Use of the Box-Cox Transformation in Limited Dependent Variable Models," *Journal of the American Statistical Association,* 73, 284-287
[14] Showalter, M. H., 1994, "A Monte Carlo Investigation of the Box-Cox Model and a Nonlinear Least Squares Alternative," *Review of Economics and Statistics*, 76, 560-570.
[15] Yang, Z., 2006, "A Modified Family of Power Transformations," *Economics Letters*, 92, 14-19.
[16] Yang, Z. L., and A. K. Tsui, 2004, "Analytically Calibrated Box-Cox Percentile Limits for Duration and Event-time Models," *Insurance Mathematics and Economics*, 35, 649-677.
[17] Yeo, I. K., and R. A. Johnson, 2000, "A New Family of Power Transformation to Improve Normality or Symmetry," *Biometrika*, 87, 954-959.

表 1. モンテカルロ法の分析結果（λ_0=0.8）

		Mean	STD	Q1	Median	Q3
BC MLE						
T=50	λ	0.595	0.141	0.496	0.592	0.686
	β_0	3.460	1.497	2.438	3.128	3.999
	β_1	0.057	0.093	0.004	0.049	0.102
T=100	λ	0.591	0.094	0.527	0.588	0.653
	β_0	3.260	0.885	2.638	3.107	3.727
	β_1	0.056	0.058	0.017	0.050	0.091
T=200	λ	0.592	0.064	0.550	0.592	0.635
	β_0	3.212	0.587	2.821	3.156	3.535
	β_1	0.053	0.038	0.027	0.052	0.077
新規推定量						
T=50	λ	0.796	0.220	0.640	0.781	0.930
	β_0	6.085	4.793	3.266	4.761	7.278
	β_1	0.115	0.260	0.005	0.080	0.187
T=100	λ	0.805	0.159	0.691	0.796	0.904
	β_0	5.560	2.703	3.753	4.860	6.581
	β_1	0.121	0.149	0.029	0.096	0.183
T=200	λ	0.804	0.109	0.738	0.800	0.876
	β_0	5.281	1.673	4.170	4.978	6.078
	β_1	0.109	0.088	0.049	0.102	0.156

表 2. モンテカルロ法の分析結果（λ_0=0.5）

		Mean	STD	Q1	Median	Q3
BC MLE						
T=50	λ	0.374	0.087	0.319	0.373	0.432
	β_0	3.474	1.415	2.503	3.160	4.136
	β_1	0.054	0.088	0.004	0.045	0.101
T=100	λ	0.370	0.059	0.329	0.369	0.408
	β_0	3.277	0.892	2.650	3.137	3.710
	β_1	0.054	0.057	0.016	0.050	0.087
T=500	λ	0.371	0.041	0.344	0.371	0.398
	β_0	3.252	0.592	2.821	3.201	3.624
	β_1	0.048	0.038	0.021	0.044	0.072
新規推定量						
T=50	λ	0.512	0.152	0.409	0.494	0.603
	β_0	6.674	6.386	3.275	4.869	7.557
	β_1	0.185	1.545	0.003	0.091	0.224
T=100	λ	0.503	0.097	0.435	0.498	0.563
	β_0	5.560	2.772	3.758	4.921	6.513
	β_1	0.116	0.140	0.029	0.093	0.180
T=200	λ	0.503	0.068	0.459	0.500	0.549
	β_0	5.330	1.584	4.212	5.044	6.274
	β_1	0.098	0.088	0.038	0.085	0.148

表 3. モンテカルロ法の分析結果（λ_0=0.2）

		Mean	STD	Q1	Median	Q3
BC MLE						
T=50	λ	0.147	0.033	0.125	0.147	0.169
	β_0	3.379	1.328	2.490	3.110	3.893
	β_1	0.051	0.088	0.002	0.041	0.094
T=100	λ	0.149	0.023	0.133	0.148	0.164
	β_0	3.293	0.853	2.675	3.149	3.753
	β_1	0.052	0.057	0.017	0.048	0.083
T=200	λ	0.147	0.016	0.135	0.146	0.157
	β_0	3.173	0.565	2.778	3.097	3.487
	β_1	0.052	0.039	0.025	0.050	0.073
新規推定量						
T=50	λ	0.203	0.055	0.164	0.198	0.234
	β_0	6.311	5.205	3.517	4.868	7.193
	β_1	0.114	0.246	0.003	0.077	0.193
T=100	λ	0.202	0.038	0.176	0.200	0.224
	β_0	5.587	2.567	3.893	4.970	6.545
	β_1	0.110	0.141	0.031	0.091	0.175
T=200	λ	0.199	0.027	0.180	0.198	0.216
	β_0	5.181	1.608	4.067	4.869	5.871
	β_1	0.106	0.090	0.047	0.096	0.151