

Introduction to Superconductivity

CHAPTER 3 THE BCS THEORY

永井佑紀

2005年12月6日

3.11 THE PENETRATION DEPTH

前節において、BCS理論の枠組みの中の超伝導体の電気力学を取り扱うさいの一般的形式を手に入れたので、この節では、いくつかの重要な場合において、実験的に観測された侵入の深さ λ の大きさの予想や温度依存性についての計算に、これらの結果を応用することにする。まず、 λ を以下の関係

$$\lambda \equiv h(0)^{-1} \int_0^{\infty} h(z) dz \quad (1)$$

で定義する。これは、磁場の侵入の仕方が指数関数的であるかどうかにかかわらず、バルク試料に侵入する際に定義されたものであるとする。この λ はまた、

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \quad (2)$$

を通じて、現象論的な London および GL 理論におけるパラメータ n_s を定義づけるのに役に立つ。

3.10 節の形式を適用するためには、ベクトルポテンシャルの適切なゲージを選ばなければならない。平板表面に平行な磁場が掛かっているような単純な状況を考えるときは、 A は表面に平行かつ h に垂直でありバルクの内部では 0 となるということを満たすゲージが一意に定まる。一方、薄膜の両側に同じ強さの平行な磁場が掛かっているような状況では、対称性から $|A|$ は薄膜内部の中央面で 0 を通過しなければならない。また、他の状況では、他のゲージが選ばれる必要がある。

3.11.1 Preliminary Estimate of λ for Nonlocal Case

非局所的電気力学を用いて侵入の深さの厳密な解を得る前に、最初に Pippard の超伝導体における結果が得られる初等的議論を行うことにする。このとき、 $\xi_0 \gg \lambda_L$ である。

非局所的電気力学を用いたときでさえ、近似的には磁場は指数関数的な侵入をすると期待されるが、このときそのようになるように λ を定義する。もし、 B_0 を界面における磁場の値として、 $h_y \approx B_0 e^{-z/\lambda}$ が成り立つとすれば、物質中 ($z > 0$) のベクトルポテンシャルの形は、適当なゲージをとれば $A_x \approx \lambda B_0 e^{-z/\lambda}$ となるだろう。これは、表面層の厚さ λ にわたって一定値 $\bar{A} = \lambda B_0$ 、そこ以外では 0 であるように大雑把に近似することができる。ここで、前節の非局所的な形式

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{3c}{16\pi^2 \xi_0 \lambda_L^2(T)} \int \frac{\mathbf{R}[\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')]]}{R^4} J(\mathbf{R}, T) d\mathbf{r}' \quad (3)$$

を用いて表面層における平均電流密度を計算すれば、平均値 \bar{A} のために、London の値よりも因子 $\sim \lambda/\xi_0$ だけ小さくなるのがわかる。なぜならば、この因子が、有効的な積分の体積 ($\sim \xi_0^3$) に対する \bar{A} が存在する体積 ($\sim \xi_0^2 \lambda$)

の比に相当するからである。言い換えれば、London の値を計算する際 \bar{A} を一定値としたのは表面から ξ_0 であり、今回は λ であるということからきている。ゆえに、

$$\bar{J} \approx -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \frac{\lambda}{\xi_0} \bar{A} = \frac{c\lambda^2 B_0}{4\pi\lambda_L^2 \xi_0} \quad (4)$$

となる。また、Maxwell 方程式を表面層において適用すると

$$\frac{B_0}{\lambda} \approx |\langle \text{curl} \mathbf{h} \rangle| = \frac{4\pi\bar{J}}{c} \approx \frac{\lambda^2 B_0}{\lambda_L^2 \xi_0} \quad (5)$$

となり、 λ についてとけば

$$\lambda \approx (\lambda_L^2 \xi_0)^{1/3} = \lambda_L \left(\frac{\xi_0}{\lambda_L} \right)^{1/3} \quad (6)$$

が、数因子を省略して得られる。非局所性が重要な場合、つまり、 $\xi_0 \gg \lambda_L$ のとき、実際の侵入の深さ λ は $(\xi_0/\lambda_L)^{1/3}$ だけ若干 λ_L を超えることになる。もちろん、 $\xi_0 < \lambda_L$ の場合においては、応答が局所的であるのでいままでの議論は適用できず、 $\lambda \approx \lambda_L$ となる。

式 (6) は、Pippard の超伝導体における λ の温度依存性について定性的な結果を与えてくれることに注意しなければならない。 T_c のごく近傍において、 $\lambda_L > \xi_0$ となるためにすべての超伝導体は局所的になる。したがって、text の fig.3.11 の応答関数の T_c 近傍の振る舞い ($K(0, T) \sim (T_c - T)$) より、 $\lambda(T) \approx \lambda_L \sim (T_c - T)^{-1/2}$ である。低温では、 $\lambda_L(T) < \xi_0$ となったとき、式 (6) より $\lambda(T) \approx (\lambda_L^2 \xi_0)^{1/3} \sim (T_c - T)^{-1/3}$ となる。これは、 $\lambda_L(T) \approx \xi_0$ である温度近傍において、二つの表現の間で温度依存性のクロスオーバーが起きているということである。異なる超伝導体では $\lambda_L(0)/\xi_0$ の値が異なるので、クロスオーバーは T/T_c で起こることになり、すべての超伝導体に適用できるような $\lambda(T)$ の温度依存性は存在しえない。特に、有名な Gorter-Casimir の二流体モデルでの依存性 $\lambda(T) = \lambda(0)/[1 - (T/T_c)^4]^{1/2}$ は、すべての物質に同様に適用できるということは、期待できない。

3.11.2 Solution by Fourier Analysis

フーリエ解析による厳密解

応答関数 $K(q)$ についての表現は、3.10 節から無限の物体についてのみ正当であるようになっているので、表面を取り扱う場合には注意が必要である。すなわち、表面に加えられる磁場を模すために、外部電流源を導入しなければならない。具体的に言えば、外部電流源として電流の膜

$$J_{x,\text{ext}} = -\frac{c}{2\pi} B_0 \delta(z) \quad (7)$$

というものを導入するとよい。この電流によって作られる磁場 h_y は対称性を持ち、 $z = 0$ において $-B_0$ から B_0 へと変化する。このとき磁場 h_y は z の奇関数であり、ベクトルポテンシャル A は偶関数である。超伝導体の内部であるとすれば、原点から λ の距離で h_y は減衰する。このとき、誘起される超伝導電流は両サイドで変わらない。また、実際には表面で電子が完全反射する場合と、完全な乱反射する場合とがあるが、ここでは表面において電子が完全反射すると考える。ちなみに、二つの極端な場合における結果は、局所的な超伝導体の場合には合致するが、極端に非局所的な場合には、 $\frac{8}{9}$ の因子だけ異なる。実際の試料の表面ではどちらの場合がよりよい近似かははっきりしないので、この似た結果は好都合である。

モデルには、有限の物質の表面を扱う代わりに無限の物質に外部電流源を導入すると、応答関数 $K(q)$ を用いて侵入長を考えることができる。まず、

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{rot rot} \mathbf{A} = -\text{rot} \mathbf{h} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{total}} = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{J}_{\text{ext}} + \mathbf{J}_{\text{med}}) \quad (8)$$

とかけることに注意する。このとき、 \mathbf{J}_{ext} は外部電流、 \mathbf{J}_{med} は誘起された電流である。最左辺と最右辺をフーリエ変換したときの各成分は

$$q^2 \mathbf{a}(q) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{ext}}(q) - K(q) \mathbf{a}(q) \quad (9)$$

となる。ここで、3.10 節で導入した関係式

$$\mathbf{J}(q) = -\frac{c}{4\pi} K(q) \mathbf{a}(q) \quad (10)$$

を用いた。式 (9) を $\mathbf{a}(q)$ について解くと

$$\mathbf{a}(q) = \frac{(4\pi/c)\mathbf{J}_{\text{ext}}(q)}{K(q) + q^2} \quad (11)$$

となる。式 (7) を用いれば $J_{\text{ext}}(q) = -cB_0/4\pi^2$ となり、 \mathbf{J} と \mathbf{A} は x 成分のみを持つことになり、結局、

$$a(q) = \frac{-B_0/\pi}{K(q) + q^2} \quad (12)$$

となる。ここで、磁場 $h(z)$ を求めることにする。 $\mathbf{h} = \text{rot} \mathbf{A}$ を用いると、

$$h_y(z) = iqa(q) \quad (13)$$

となる。よって、フーリエ逆変換をすると、

$$h(z) = \frac{B_0}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{qe^{iqz} dq}{K(q) + q^2} = \frac{2B_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q \sin qz dq}{K(q) + q^2} \quad (14)$$

となる。 $K(q)$ は q の正負に依らないので偶関数であるから、被積分関数を偶関数を奇関数にわけると、偶関数のみが積分に寄与する。この式はどんな $K(q)$ においても成り立ち、 h の z 依存性を正しく与えている。また、 $K(q) = \text{constant}$ でない限り、London 理論と同様の厳密な指数関数的な依存性にはならない。

侵入の深さを求めるには、式 (14) を積分すればよくて、

$$\lambda = B_0^{-1} \int_0^{\infty} h(z) dz = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{q \sin qz dq dz}{K(q) + q^2} \quad (15)$$

となる。ここで、

$$\int_0^{\infty} q \sin qz dz = \lim_{Z \rightarrow \infty} \int_0^Z q \sin qz dz = \lim_{Z \rightarrow \infty} (1 - \cos qZ) \quad (16)$$

となり、第二項目の振動項は、 q による積分において平均的に寄与は 0 になることがわかる。したがって、

$$\lambda_{\text{spec}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dq}{K(q) + q^2} \quad (17)$$

を侵入長として用いてもよいことがわかる。

式 (17) を用いれば、 $K(q)$ が定義されたどんな超伝導のモデルでも λ_{spec} を計算することができる。たとえば、London 理論では $K(q) = 1/\lambda_L^2$ であるから、

$$\lambda_{\text{London,spec}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dq}{\lambda_L^{-2} + q^2} = \lambda_L \quad (18)$$

となる。¹

次に、Pippard の理論から値を求めることにする。まず、BCS 理論での $K(q)$ は

$$K(q) = \frac{16\pi^2 C}{3c} \int_0^{\infty} \left[\frac{3}{qR} j_1(qR) \right] F(R) dR \quad (19)$$

である。ここで $j_1(x) = x^{-2} \sin x - x^{-1} \cos x$ は球 Bessel 関数である。また、 $F(R)$ は

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = C \int \frac{\mathbf{R}[\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')]]}{R^4} F(R) d\mathbf{r}' \quad (20)$$

¹ $q = \lambda_L^{-1} \tan \theta$ と変数変換する。

を満たし、 $J(r)$ は

$$-\frac{3c}{16\pi^2\xi_0\lambda_L^2(T)} \int \frac{\mathbf{R}[\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}(r')]}{R^4} J(R, T) d\mathbf{r}' \quad (21)$$

であるから、結局 $K(q)$ は

$$-\frac{1}{\xi_0\lambda_L^2(T)} \int_0^\infty \left[\frac{3}{qR} j_1(qR) \right] J(R, T) dR \quad (22)$$

となり、Pippard の理論では $J(R, T) = e^{-R/\xi}$ であるから、

$$-\frac{1}{\xi_0\lambda_L^2(T)} \int_0^\infty \left[\frac{3}{qR} j_1(qR) \right] e^{-R/\xi} dR \quad (23)$$

となる。これを積分すると、

$$K_p(q) = \frac{1}{\lambda_L^2} \frac{\xi}{\xi_0} \left\{ \frac{3}{2(q\xi)^3} [(1 + q^2\xi^2) \tan^{-1} q\xi - q\xi] \right\} \quad (24)$$

となる。また、以前の節で議論したように $J(R, T) \approx J(0, T) \exp[J(0, T)R/\xi_0]$ を用いることもできる。このときは、 ξ_0 のかわりに $\xi'_0 = \xi_0/J(0, T)$ を用いて置き換えればよい。

このように、 $K(q)$ を解析的に表現しても、侵入の深さを出すためには数値積分が必要になる。

極限での値

詳細な数値計算を避けるため、解析的な解がある二つの極限を考える。実際の状況はこの二つの極限の間にあると考えられる。

まず、局所近似は、すべての q に対して、 $K(q) = K(0)$ である考えるものである。 $K(0)$ が一定値なので、侵入の深さは London 形式を修正した形式をとる。3.10 節で得られた結果

$$K(0) = \frac{16\pi^2 C}{3c} \int_0^\infty F(R) dR \quad (25)$$

に、3.10 節で議論された一般化された Pippard 近似による積分核 $J(R, T) = J(0, T) \exp(-J(0, T)R/\xi_0)$ を用いると、3.10 節で得られた結果

$$\lambda_{\text{eff}}(l, T) = \lambda_L(T)(1 + \xi'_0/l)^{1/2} \quad (26)$$

が得られる²。これは、 $T = 0$ において $\lambda_{\text{eff}}(l, T) = \lambda_L(T)(1 + \xi_0/l)^{1/2}$ となり、 $T = T_c$ 近傍では $\lambda_{\text{eff}}(l, T) = \lambda_L(T)(1 + 0.75\xi_0/l)^{1/2}$ となる。この近似は $l < \lambda(T)$ であるような dirty な超伝導体でよく成り立ち、また、 $\lambda(T) > \xi_0$ となるような T_c 近傍では pure な超伝導体でさえよく成り立つ。高温超伝導体では純度にかかわらずにすべての温度領域で $\lambda(T) > \xi_0$ であるので、BCS モデルさえ成り立てばこの近似式は適用できるはずである。

もうひとつの近似は、極端に異常な極限 (extreme anomalous limit) である。この極限においては $K(q)$ は $q \rightarrow \infty$ における漸近値に置き換えられる。このとき $K(q) \sim 1/q$ である。これは $\lambda_L(0) \ll \xi_0$ である pure な超伝導体において妥当な近似である。

この極限においては $K(q)$ は

$$K(q) = \frac{a}{q} \quad (27)$$

となる。ここで、Pippard 理論の値から得られる a の値は $a = 3\pi/4\lambda_L^2\xi_0$ であるが、BCS 理論あるいは一般化された Pippard 理論においては ξ_0 は ξ'_0 に置き換えられる。したがって、 a は $J(0, T)$ の因子分だけ大きくなる。この極限における λ の値を λ_∞ と置けば、式 (17) は

$$\lambda_{\infty, \text{spec}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{(a/q) + q^2} \quad (28)$$

² $C = -3c/16\pi^2\xi_0\lambda_L^2$ である。

となる。 $x = q^3/a$ と変数変換すれば

$$\lambda_{\infty, \text{spec}} = \frac{2}{3\pi a^{1/3}} \int_0^{\infty} \frac{x^{-1/3} dx}{1+x} = \frac{4}{3\sqrt{3}a^{1/3}} \quad (29)$$

となる³。 a の具体的な値を入れると、

$$\lambda_{\infty, \text{spec}} = \frac{8}{9} \frac{3^{1/6}}{(2\pi)^{1/3}} (\lambda_L^2 \xi_0')^{1/3} = 0.58 (\lambda_L^2 \xi_0')^{1/3} \quad (30)$$

となる。これは、3.11.1 節で簡単な議論により予想される形式とまったく同じである。単純な Pippard の形式と BCS のその訂正との比 $(\xi_0'/\xi)^{1/3} = [J(0, T)]^{-1/3}$ は、 $T = 0$ で 1 であり、 $T = T_c$ で 0.91 である。したがって、結果にはほんの少ししか影響を与えていないのである。

また、表面において乱反射がおこる場合はこの計算の結果は

$$\lambda_{\infty, \text{diff}} = 0.65 (\lambda_L^2 \xi_0')^{1/3} \quad (31)$$

$$= 0.65 (\lambda_L^2 \xi_0)^{1/3} [J(0, T)]^{-1/3} \quad (32)$$

となる。完全反射の場合の方が数因子 $\frac{8}{9}$ だけ小さい。

これらの結果の応用の見通しを考えるには、 T_c より十分低いときのいくつかの pure な金属のパラメータの値に注目してやればよい。アルミニウムは $\lambda_L \approx 160 \text{ \AA}$ 、 $\xi_0 \approx \text{ \AA}$ であるから $\xi_0/\lambda_L \approx 100$ であり、 λ_{∞} がよい近似となっている。錫は $\lambda_L \approx 350 \text{ \AA}$ 、 $\xi_0 \approx 3000 \text{ \AA}$ 、ゆえに λ_{∞} はある程度の良い近似にすぎない。鉛は $\lambda_L \approx \xi_0/2$ であり、London の局所近似のほうが λ_{∞} より実際的である。高温超伝導物質では、典型的には $\lambda_L \approx 1500 \text{ \AA}$ 、 $\xi_0 \approx 15 \text{ \AA}$ であり、電気力学は完全に局所的であり λ_{∞} は不適切である。また、典型的な合金超伝導体においても同じであり、これらは $\xi \approx l \ll \lambda_L$ という短い平均自由行程を持つ。

以上のことからわかったことは、実際の物質を考えると、非局所的な電気力学が大きな役割を果たしているのは、高い Fermi 速度を持ち、低い T_c であり、長い平均自由行程を持つ物質、つまり、純度の高いアルミニウムのような物質においてしかないということである。アルミニウムから鉛まで λ_L の計算値が三倍ほど違うというのに、侵入の深さの測定値がすべて 500 \AA 程度であるのはなぜなのか、という歴史的に重要な問題を説明するのにコヒーレンス長 ξ_0 の役割についてかなり注目してきた。これは、BCS/Pippard 理論の定量的な確認を与えるものである。

各極限の意味

式 (17) の被積分関数の分母には、 $K(q)$ と q^2 という、 q 依存性を二つの関数が存在する。したがって、被積分関数には、 $K(q)$ が支配的になる q の領域と q^2 が支配的になる q の領域が存在し、二つの変動によるクロスオーバーが存在すると考えることができる。ここで、 $K(q)$ の特徴的な変動スケールは $1/\xi$ であるから、 $K(q)$ と q^2 の交点の位置と $1/\xi$ の大小関係によって、被積分関数の振る舞いが $K(q)$ の振る舞いに支配される領域は変わってくる。

3.11.3 Temperature Dependence of λ

今まで見てきたように、BCS 理論においては、 $\lambda(T)/\lambda$ は (T/T_c) という形の共通の温度依存性を持ち得ない。なぜならば、異なる物質で $\xi_0/\lambda_L(0)$ という比が異なるからである。したがって、それぞれの場合において数値計算が必要となる。しかし、得られた結果は、よくある超伝導体において実験的に観測されている一般的な「二流体」モデルで得られる温度依存性とそんなに著しく違ったものではない。なぜならば、実際の測定は感度の限界によってそんなに $T = 0$ 近傍まで行えないということがあるからである。(しかし、高温超伝導体においては、温度依存性は明らかに異なっている。) このことをよく理解するために、さまざまな結果を二流体モデルの依存性と比べることにする。

³ $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx = B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ 、 $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}$ を用いた。

最も簡単な結果は、局所極限における純粋な試料の場合である。このとき、 $\lambda(T)/\lambda(0) = \lambda_L(T)/\lambda_L(0)$ であり、この依存性は 3.10 節で得られており、

$$K(0, T) = \lambda_L^{-2}(T) = \lambda_L^{-2}(0) \left[1 - 2 \int_{\Delta}^{\infty} \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \frac{E}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} dE \right] \quad (33)$$

である。純粋金属での極端に異常な極限では、式 (30) より

$$\frac{\lambda_{\infty}(T)}{\lambda_{\infty}(0)} = \left[\frac{\lambda_L^2(T)}{\lambda_L^2(0) J(0, T)} \right]^{1/3} = \left[\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \tanh \beta \Delta(T)/2 \right]^{-1/3} \quad (34)$$

という関係式が得られる。ここで、3.10 節で得られた関係式

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_n} = \frac{\pi \Delta}{\hbar \omega} \tanh \frac{\Delta}{2kT} \quad \hbar \omega \ll 2\Delta \quad (35)$$

を用いて

$$\frac{\sigma(T)}{\sigma_n(T)} = \frac{ic^2}{3\pi\omega} \frac{\lambda_L^{-2}(T)}{\sigma_n(T)} = \frac{\pi \Delta(T)}{\hbar \omega} \tanh \frac{\beta \Delta(T)}{2} \quad (36)$$

$$\frac{\sigma(0)}{\sigma_n(0)} = \frac{ic^2}{3\pi\omega} \frac{\lambda_L^{-2}(0)}{\sigma_n(0)} = \frac{\pi \Delta(0)}{\hbar \omega} \quad (37)$$

とした。得られた関係式は $\lambda_L(T)$ と $\Delta(T)$ による $J(0, T)$ の数学的定義を与える。これら二つの量はすでに定義されており⁴Muhlschlegel の数表に載せられている。最後に、dirty で局所的な極限を考える。このとき、式 (26) がよく成り立ち、

$$\frac{\lambda_{\text{eff}}(T)}{\lambda_{\text{eff}}(0)} = \frac{\lambda_L(T)}{\lambda_L(0) J^{1/2}(0, T)} = \left[\frac{\lambda_{\infty}(T)}{\lambda_{\infty}(0)} \right]^{2/3} \quad (38)$$

である。二流体モデルでは

$$\frac{\lambda(T)}{\lambda(0)} = \frac{1}{[1 - (T/T_c)^4]^{1/2}} \quad (39)$$

である。

図.3.15 ではさまざまな理論的な結果と実験的近似式である二流体近似の温度依存性をプロットしている。明らかに、理論計算の中で、 λ_{∞} の温度依存性が式 (39) と一番よく一致している。これは、 λ_{∞} が錫のような典型的な pure な超伝導体においてもっともよい近似となっているので、満足のいく結果である。この錫については、早くから注意深い測定が行われてきた。しかし、前にも述べたように、 λ_{∞} の近似は、 $\lambda(T)$ が ξ_0 を超える T_c 近傍で破綻する。実際、 T_c 近傍における λ_{∞}^{-2} の無限大の勾配は、厳密の計算では λ_L^{-2} の有限の勾配に抑えられる。注意しなければならないのは、図.3.15 において、絶対零度での λ_{∞} と λ_L に規格化の違いがあるため、 T_c 近傍での λ_L^{-2} の勾配を λ_{∞}^{-2} のそれと比較する前に、因子 $\sim 0.4[\xi_0/\lambda_L(0)]^{2/3}$ だけ増大させなければならないことである。この補正係数に適切な値を用いることによって実際に実験曲線の勾配に近づけることができる。その結果、純微視的理論は、簡単な λ_{∞} 自身よりむしろ、経験的な二流体モデルの法則に近い温度依存性を与えることがわかった。ここでもうひとつ注目すべきことは、図.3.15 において、純粋で局所的な弱結合 BCS 超伝導体での λ^{-2} の温度依存性は、 $t = T/T_c$ としたときの $(1 - t^4)$ より一般的に $(1 - t^2)$ により近いということである。だから、二流体モデルの温度依存性については普遍的とは言えず、注意して使わなければならない。

3.11.4 Penetration Depth in Thin Films: λ_{eff} and λ_{\perp}

この節では、おもにお話になっていて、具体的な議論があるわけではなく、結果のみを引用する形になっている。

非局所的な超伝導体薄膜の磁場侵入長についての理論は、次のようないくつかの理由で注目されてきた。一つ目に、初期の多くの測定が、磁気モーメントの温度変化が観測できるように厚みが $d \sim \lambda$ 程度の薄膜で行われて

⁴ギャップ方程式と応答関数と侵入長の関係式によって定義されている。

おり、そのとき測定した λ がバルク試料の代表的値とどう違うか問う必要があったためである。もう一つは、超伝導体薄膜の磁場中での実験が多く行われ、磁場と薄膜との相互作用をできるだけ正確に理解しようとしたためである。その結果、薄膜の特性解析は、非局所的な電気力学についてさらに多くの成果をもたらした。それらはバルクの超伝導体表面での磁場侵入の解析からは得られなかったものである。

この解析の最終的な結果は、次のように簡単に述べることができる。

平行磁場内の十分に薄い膜において、遮蔽されていない場の特性としてベクトルポテンシャルを $A_y = H_x x$ のようにとることができて、それに対する非局所的な超伝導体の超伝導電流の反応は基本的に局所的な超伝導体と同様であり、

$$\lambda_{\text{eff}} \approx \lambda_L (\xi'_0/d)^{1/2} \quad (d \ll \xi'_0) \quad (40)$$

で表される。ただし、乱反射的な表面散乱の場合には、これに数係数として $\frac{4}{3}$ が、鏡面散乱の場合には $(\frac{4}{3})^{1/2}$ がつけられる。

この結果は、dirty な超伝導体でしかも平均自由行程 l が表面散乱のために $l \approx d$ のように膜厚 d で抑えられた場合の磁場侵入長を表す式 (26) とよく似ていることに注意すべきだろう。

磁場が薄膜 ($d \ll \lambda$) に垂直に加えられた場合には、全く異なった問題が入ってくる。この場合には、電流が磁束の薄膜通過を支配する。それで、ベクトルポテンシャル A と電流密度は、膜厚にそってはほぼ一様である。これは、前節での平行磁場の場合に遮蔽電流が膜の中心の両側で反対方向であるのとはまったく異なる。 A が厚みにそって一様なので、応答の非局所効果は表面散乱で決まる。

もしそれが乱反射的であれば、一様な A が、非局所的な電流表現で積分される有効厚として d がきめられる。そして λ_{eff} はわずかに 1 に近い係数だけをつけて式 (40) で与えられる。一方、表面散乱が完全に鏡面的であれば、境界条件から一様な A は全領域について積分されねばならない。そして λ_{eff} は同じ純度と平均自由行程のバルク超伝導体と同じになる。実際に、式 (40) は、非常に小さい表面 diffuse 散乱と厚み d と同程度の内部平均自由行程 l の組み合わせのために、いつも大変良い近似になっている。

垂直磁場の場合のより重要な結果は、遮蔽距離 λ_{scr} がこの λ_{eff} ではなくて、Pearl の古典的論文に示されているように、厚みによって変わる $\lambda_{\perp} \approx \lambda^2/d \gg \lambda$ によって与えられるということである。この λ_{\perp} は Maxwell 方程式の二次元解の効果を反映しているものであり、式 (40) の λ_{eff} であらわされる J と A の局所関係に含まれる基本的な n_s の変化を意味するものではない。遮蔽の二次元と三次元性の特徴を際立って示すために、ここで両方の場合を平行して扱う興味ある議論をすることにする。

いま、超電導物質内に直線に沿って電流が流れるフィラメントを外部から導入した場合の反応を考えて、遮蔽距離 λ_{eff} を導く。その場合のフィラメントの周りに反並行の遮蔽超伝導電流 $-I$ が生じるので、 λ_{scr} より遠くでは誘起磁場は急激にゼロに近づく。

侵入長 λ_{scr} の遮蔽領域内では電流による磁場は $2I/c\lambda_{\text{scr}}$ の程度であり、フィラメントに平行なベクトルポテンシャル A の大きさは London ゲージで $2I/c$ の程度である。そのポテンシャルについての London 方程式 $J_s = -(c/4\pi\lambda_{\text{eff}}^2)A$ から、フィラメントの近くの遮蔽電流密度は $J_{\text{scr}} \approx -I/2\pi\lambda_{\text{eff}}^2$ となる。

三次元のバルク超伝導体の場合には、遮蔽電流は半径 λ_{eff} の円形断面内を流れるので、全電流は $\pi\lambda_{\text{scr}}^2 J_{\text{scr}}$ の程度であるだろう。これを元の電流 I に等しいと置いて、 $\pi\lambda_{\text{scr}}^2 \approx 2\pi\lambda_{\text{eff}}^2$ すなわち $\lambda_{\text{scr}} \approx \lambda_{\text{eff}}$ が予想通りに得られる。

この結果を、厚み d の超伝導薄膜の内部 (または表面上) の電流フィラメントの場合と対比してみる。遮蔽電流密度 J_{scr} はこの場合も上に得られたのと同じでよいが、それは断面積 $\approx 2\lambda_{\text{scr}}d$ のみを流れる。だから、全遮蔽電流を元の I に等しいとして $\lambda_{\text{scr}}d \approx 2\pi\lambda_{\text{eff}}$ となる結果、わずかの数係数を除いては、

$$\lambda_{\perp} = \lambda_{\text{scr}} \approx \lambda_{\text{eff}}/d \quad (d \ll \lambda_{\text{eff}}) \quad (41)$$

となる (図.1)。

この一般的な結果の最も重要な応用は、薄膜に垂直に入射して通過する磁束量子の渦電流に関してである。Pearl が彼の原論文で示したように、薄膜内の薄い渦の電流密度が $1/r$ から a/r^2 の依存性になるのが、この λ_{\perp} 程度のところである。

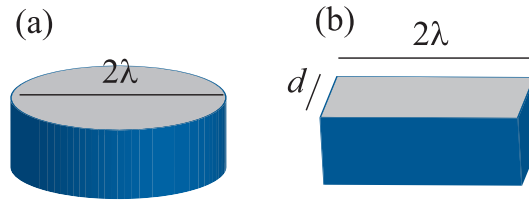


図 1: (a) バルク電流の断面積 (b) 薄膜電流の断面積

比較のために、侵入長が λ 程度であるバルクの超伝導体内の同様な渦電流の密度の半径方向の変化は、 $1/r$ から $r \sim \lambda$ のところで、指数関数的に消失する。だから、渦の半径はバルク超伝導体の場合の $\sim \lambda$ から、厚み $d < \lambda$ の薄膜では $\sim \lambda_{\perp}$ に広がる。

さらに、Pearl の解は、中心から遠くでの電流密度の変化がバルク超伝導体では指数関数 $\sim e^{-r/\lambda}$ で表される激減であるのに対して、薄膜では $\sim 1/r^2$ 程度の緩やかさであることを示している。

3.11.5 Measurement of λ

この節では磁場侵入長を測定するための実験技術に簡単にみていく。

コロイド粒子や薄膜の集合を用いた測定

もっとも初期の実験。 λ と同程度の微小なサイズ d の試料。温度とともに $\lambda(T)$ が変わると、磁化率の変化が測定できた。試料の粒半径のようなサイズ分布がわかっている場合には、London 理論を用いて $\lambda(T)$ を見積もることができたが、定量的にはかなり不確実。

交流磁化率の測定

単結晶試料の表面での磁場侵入の温度変化 $[\lambda(T) - \lambda(0)]$ を検出するのに、交流磁化率の測定技術は十分な感度があった。この実験は、Laurmann と Shoenberg によって 70Hz での相互インダクタンスブリッジを使って初めてうまく行われた。しかし、定量的な結果を得る感度には至らなかった。

マイクロ波測定

λ の変化を 2 のレベルでの検出可能にしたのは、周波数を $\sim 10^{10}$ Hz にあげて、 $\lambda(T)$ の変化が引き起こす空洞の共鳴周波数の温度によるずれを測定するマイクロ波技術である。Pippard が達成した。

しかし、高周波になると常伝導電子のために必要な補正効果が大きくなる。常伝導表皮効果の厚みを参照値にすることによって、 $\lambda(T)$ の絶対値を求めることができるが、その温度変化までは確かでなく精度は必ずしも良くなかった。

Schawlow と Devlin らは、高周波補正を無視できるような 10^5 Hz で錫の $\lambda(T)$ の測定を行った。低周波のための感度低下の問題があったが、デジタル周波数カウンターが使えるようになって、空洞周波数のずれを高精度で測定できるようになった。

実験から言えること

測定結果はおおむね $\lambda(T) \propto y = (1 - t^4)^{-1/2}$ の 流体モデルの関係式に従うけれども、 $d\lambda/dy$ の y に対するグラフは $y \approx 1.5$ 以下で急激な増大を示した。このような振る舞いは、BCS 理論によって明らかに予想されていたものである。

それはギャップを超えての励起が指数関数的に減少してそれが式 (33) で与えられる $\lambda_L(T)$ の温度依存性を規定しているためである。理論と実験の間の完全な一致はまだ得られていないが、これはたぶん、理論は理想的な等方性金属のためであるのに対して、実測の錫は複雑な Fermi 面をもっておりギャップならびに磁場侵入深さに異方性があるためとみられる。 $\lambda(T)$ についてのこれら高周波測定については Waldram が概説している。

ここで記憶すべきは、最も高感度の測定は $\lambda(T)$ の温度変化だけである、ということである。そのため $\lambda(0)$ の「実験値」として引用されているものは、ふつう $\lambda(T)$ の理論にデータをあわせて推定された値である。これは通常 (の領域) 古典的な二流体モデルによる依存性で扱われており、それによって BCS 理論の $\lambda(0)$ と ξ_0 の二つのパラメータが適合されているのである。

高温超伝導体の出現はこの $\lambda(T)$ の測定への関心を喚起した。なぜなら、その絶対値は直接に n_s の情報をもたらし、その温度依存性は予言されたいろいろな微視的理論でそれぞれ異なっていたからである。

たとえば、Fermi 面上に有限のギャップをもつ BCS 高純度超伝導体の局所場モデルでは、 $[\lambda(T)/\lambda(0) - 1]$ は式 (33) で導かれたように $T \rightarrow 0$ につれて $T^{-1/2}e^{-\Delta(0)/kT}$ のように指数関数的にゼロになっていく。ところが、ギャップの中に node がある超伝導体では、ギャップの底に有限の状態密度を持つ。その結果、 $[\lambda(T)/\lambda(0) - 1]$ は $(T/T_c)^n$ の形でゼロに近づく。ここで指数 n は node が点か線かなどによって異なる。

また、困ったことに、これらの物質試料表面の不確かさが、前に古典的な超伝導体の高周波測定でも述べた問題の上にさらに障害となる。それにもかかわらず、Anlage らによって高周波共鳴する細線試料について行われた、きわめて高感度の測定によると、YBCO での $\lambda^{-2}(T)$ は通常的二流体的な $(1 - t^4)$ 特性よりはむしろ $1 - t^2$ に近い温度依存性を示す。

言い換えれば、侵入長はいままで超伝導体よりも低温側へとずれる。一般にこれは BCS よりも低いレベルの準粒子状態を意味し、ある方向でかなり小さなギャップをもつ本質的な異方性、あるいはギャップがゼロになる node を生じる普通ではない電子対生成を反映しているともいえる。

表面状態にかかわらず、 $\lambda(T)$ の絶対値測定を可能にする新しい実験法として、ミュン中間子のスピン回転の測定があり、これで混合超伝導状態での局所的な磁場分布を決定できる。磁場変化は $1/\lambda^2(T)$ のスケールであり、それが $\lambda(T)$ をもたらす局所的な渦電流の大きさを決めることになる。

この方法の精度は高周波技術に比べて高くはない。また磁束管の平衡点の周りの熱運動などによって結果の解釈に複雑さがあるが、高温超伝導体の研究にはこの測定法は大変有用と考えられる。興味ある物質系についてのそれらの測定結果は 9.9.3 節で他の方法との比較で述べられる。

3.12 CONCLUDING SUMMARY

まとめである。

二流体モデルでは説明できないことも、BCS 理論で予言することができた。

BCS 理論は、比較的簡単な現象論的な London 方程式や半微視的な Ginzburg-Landau 理論に、微視的な基礎付けを与えることがわかった。そのため、今後多様な超伝導現象を展開していくのに、簡単な後者の式や理論を使っていくことにする。この筋道がこのテキストの残りの章の大部分を占めることになる。