Introduction to Superconductivity

発表日 5 月 25 日 (水)、6 月 1 日 (水)
場所 3 号館 108 号室

担当：藤田朗丈[1]

2.4 Intermediate State Above Critical Current of A Superconducting Wire

この節では超伝導体に臨界電流以上の電流を流した場合を考察する。ここで半径 a の超伝導線を電流 I が流れるとする。2.2.2 によれば臨界電流は

$$I_c = \frac{H_c ca}{2} \tag{1}$$

によって定義されている。(Silsbee の規則) 特に超伝導体の厚さが磁場侵入長 λ よりずっと薄い場合、臨界電流は上式で与えられる電流よりも小さくなる。と教科書には書かれているが、自分が計算したところ反対の結果が出てきてしまった。
以下その説明
2.2.1 において磁場に平行に置かれた平板の場合、平板の厚さ d が $d \ll \lambda$ の時には $d \gg \lambda$ のときに比べて臨界磁場が大幅に増大している。この場合と同様の考察[2] をすることにより、超伝導線の場合も $a \ll \lambda$ のときには臨界磁場は大幅に増大する。超伝導線の場合、内部電流密度の関数形は中心からの距離 r を変数 (正確には $\frac{r}{\lambda}$ を変数とする) とする第一種変形ベッセル関数となることが知られている。ここで第一種変形ベッセル関数の特徴として、変数が十分小さい範囲ではその値はほとんど 1 になることが知られている。非常に極端な場合として超伝導線の内部で電流密度が一定であるとする。この場合の臨界電流・臨界磁場をそれぞれ I_c'、H_c' とすれば、中心からの距離 r で臨界磁場に達するとすれば内部で電流密度が一定であるとするので、

$$I(r\ \text{内部}) = I_c' \frac{r^2}{a^2} \tag{2}$$

これを用いれば

$$H_c' = \frac{2I(r\ \text{内部})}{cr} = \frac{2r}{ca^2} I_c' \tag{3}$$

よって

$$I_c' = \frac{H_c' ca}{2} \frac{a}{r} \tag{4}$$

[1] s31558@mail.ecc.u-tokyo.ac.jp
[2] $d \ll \lambda$ では磁化の絶対値が大幅に減少するため、臨界磁場が大幅に増加する。臨界磁場の定義式は教科書 (2.6) 式参照

この式は $r=a$ のときに最小となる。

$$I_c'(\mathrm{min})=\frac{H_c'ca}{2} \tag{5}$$

(1) 式と (5) 式を比べると ($H_c'>H_c$ なので)$I_c'>I_c$ となる。(説明終)

それでは本題にもどり、$d\gg\lambda$ で超伝導線に臨界電流以上の電流を流してた場合にどうなるかを考察する。臨界電流を超えると表面磁場が臨界磁場を超えるので表面は正常状態に戻る。すると表面が正常状態で内部が超伝導状態になっていることになる。ところがこうなると電流が全て超伝導状態の部分を流れることになり、すると境界層で臨界磁場を超えてしまうことになる。つまり超伝導相が常伝導相に囲まれているような状態は実現しない。すると全てが常伝導相になるかというと、そうなってしまうと中心に近い部分で臨界磁場を下回ってしまうので、これも矛盾となる。
以上の問題を解決するモデルとして London によって提唱されたのが超伝導の中間状態が常伝導相に囲まれたような状態である。そこでここでは半径 $r_1<a$ が境界相になっているとする。中間状態の性質は表面エネルギーを無視すれば $r\leq r_1$ において $H(r)=H_c$ なので、$r\leq r_1$ の範囲で

$$I(r\,\text{内部})=\frac{crH_c}{2} \tag{6}$$

が成り立つことが必要である。これは電流密度として

$$J(r)=\frac{dI}{dS}=\frac{1}{2\pi r}\frac{dI}{dr}=\frac{cH_c}{4\pi r} \tag{7}$$

が要求されていることになる。$J(r)$ が r に依存しているにも関わらず、電流方向の電場 E は r に依存しない。これは以下のようにして示される。
超伝導線が時間的に安定な構造をしていれば、Maxwell 方程式により curl$\boldsymbol{E}$=0 が保証されている。ここで curl$\boldsymbol{E}$ の ϕ 方向成分は $\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}$ であるが、対称性より $\boldsymbol{E}$ は r のみの関数なので、

$$\frac{\partial E_z}{\partial r}=0 \tag{8}$$

が成り立ち、ゆえに電流方向の電場 E は r に依存しない。
さて教科書の図 2.4 にのっているような London 模型によれば、中心からの距離 r における中間状態での抵抗のある部分の割合は $\frac{r}{r_1}$ であるので、正常状態の抵抗率を ρ とすれば、

$$J(r)\frac{r}{r_1} = \frac{E}{\rho} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow J(r) = \frac{Er_1}{\rho r} \tag{10}$$

が成り立つ。
(9) 式は中間状態における正常状態部分における Ohm の法則と考えることが

できる。つまり、電流密度が (正常状態の領域)/(正常領域＋超伝導領域) 倍されていると考える。(7) 式と (10) 式より $J(r)$ を消去すれば、

$$r_1 = \frac{\rho c H_c}{4\pi E} \tag{11}$$

であることがわかる。芯の内側を流れる電流 I_1 は芯の表面上で臨界磁場 H_c を発生するので、

$$I_1 = \frac{c r_1 H_c}{2} = \frac{c^2 H_c^2 \rho}{8\pi E} \tag{12}$$

となる。一方芯の外側の正常領域を流れる電流 I_2 は

$$I_2 = J\pi(a^2 - r_1^2) = \frac{E}{\rho}\pi(a^2 - r_1^2) = \frac{\pi a^2 E}{\rho} - \frac{c^2 H_c^2 \rho}{16\pi E} \tag{13}$$

であるので、電線内を流れる全電流は

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi a^2 E}{\rho} + \frac{c^2 H_c^2 \rho}{16\pi E} \tag{14}$$

である。
(1) 式と (14) 式とから H_c を消去すると、

$$E = \frac{\rho I}{2\pi a^2}\left\{1 \pm \left[1 - \left(\frac{I_c}{I}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{15}$$

I が増加すると E も増加しなければならないので、上式はプラスの符号を選ばなければならない。
よって中間状態を含んだ抵抗を R、正常状態の抵抗を R_n とすれば、

$$\frac{R}{R_n} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left[1 - \left(\frac{I_c}{I}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{16}$$

が成り立つ。ただし、これは $I > I_c$ においてで $I < I_c$ では全領域で超伝導状態なので $R = 0$ となる。
以上から $I = I_c$ で不連続に正常状態の抵抗の半分が出現し、その瞬間超伝導線全体が中間状態となる。さらに電流を増加させていくと中間状態の領域が中央部分に小さな芯として縮んでいき、抵抗は連続的に増加する。電流を十分大きくしていくときの芯の半径の漸近形を求める。
(15) 式に (11) 式を用いて E を消去し、さらに (1) 式を用いて H_c を消去すれば、

$$\frac{I_c}{r_1} = \frac{I}{a}\left\{1 + \left[1 - \left(\frac{I_c}{I}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{17}$$

となるので、$I \gg I_c$ であれば $\frac{I_c}{I}$ は 1 に対して無視できるので、

$$\frac{I_c}{r_1} \approx \frac{2I}{a} \tag{18}$$

よって r_1 の漸近形は、

$$r_1 = 2a\frac{I_c}{I} \tag{19}$$

となる。この式を見ると、どんなに大きな電流を流しても有限の芯が存在することになる。しかし現実的には電流を大きくすると Joule 発熱の効果がおおきくなるため、詳細を等温で確認することは困難である。(16) 式は定性的にはよい結果を与えるが、定量的には不十分な結果を与える。特に $I - I_c$ で与えられる不連続な抵抗の値は (16) 式から予想される $0.5R_n$ ではなく、$0.7-0.8R_n$ となることが知られている。
このように中間状態に対する Lnodon 理論は定量的には必ずしも正しい結果を与えないが、それでも半定量的には中間状態をうまく説明しているといえる。
この理論は超伝導線が T_c 近傍でその転移点を通過するときの抵抗の温度依存性を予言するのにも適用できる。この温度領域では $I_c \propto H_c \propto (T_c - T)$ であるので、

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{dI_c}{dT}_{T=T_c}\Delta T^{'} && (20)\\ &= \frac{d}{dT}\left(\frac{H_c(T)ca}{2}\right)_{T=T_c}\Delta T^{'} && (21)\\ &= -\frac{caH_c(0)}{2T_c}\Delta T^{'} && (22)\\ &= \frac{ca}{2}H_c(0)\frac{\Delta T}{T_c} && (23) \end{aligned}$$

となる。ただしここで $\Delta T = T_c - T, \Delta T = -\Delta T^{'}$ であり、さらに $H_c \propto (T_c - T)$ より、$H_c(T) = H_c(0)\frac{T_c - T}{T_c}$ とおいた。
(20) 式を (16) 式に代入すれば、

$$\frac{R}{R_n} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left[1 - \left(\frac{\Delta T}{\delta T_c}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{24}$$

となる。ただしここで $\delta T_c = I\left(\frac{dI_c}{dT}\right)^{-1}$ とおいた。例えば測定電流 1A を直径 1mm の超伝導線に流すと、抵抗の出だしは T_c よりも 0.03K 程度低くなる[3] 。このように測定電流を小さく保つことによって、δT_c を試料形状による転移幅に対して無視できるようになる。

[3] 理科年表のスズの臨界温度 3.722K、臨界磁場 305.5(Oe) を上式を用いて計算すると、$\delta T_c =$ 0.0487K となる。

2.5 High-Frequency Electrodynamics

前節で扱ったような静的な例では超伝導体は電気的損失は全くない反磁性応答するものとして記述されていた。しかし交流電流が流れる時は超伝導体には必ず有限の散逸が現れる。これは Lndon の第一方程式における変動電場 E が正常電子にも働き、Ohm の法則により記述されるのでエネルギー散逸が起こるからである。この節では二流体モデルを用いてこの現象を考察する。しかしこのモデルが適用できる範囲はエネルギーギャップよりも低い周波数に制限されており、その理由はそれ以上の周波数では付加的な損失機構が入ってきて、損失は正常状態のそれに近づいていくことになるからである。

2.5.1 Complex Conductivity in Two-Fluid Approximation

2.1 節で紹介された金属の Drude 模型では電子気体のドリフト速度は

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\boldsymbol{E} - m\frac{\boldsymbol{v}}{\tau} \tag{25}$$

の方程式に従う。$\boldsymbol{J} = ne\boldsymbol{v}, \boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ を用いて電場 $\boldsymbol{E}$ だけの式にすると (25) 式は

$$m\sigma\frac{d\boldsymbol{E}}{dt} = ne^2\boldsymbol{E} - m\frac{\sigma}{\tau}\boldsymbol{E} \tag{26}$$

となる。

さて今電場の応答を超伝導体の線型応答に限るなら加えられた電場を Fourier 分解し、各々の周波数に対する応答を別々に分離して扱う。$E = Ee^{-iwt}$ を (26) 式に代入すると、複素伝導度は

$$\sigma_j(\omega) = \sigma_{1j}(\omega) + i\sigma_{2j}(\omega) = \frac{n_j e^2 \tau_j}{m}\frac{1}{1 - i\omega\tau_j} \tag{27}$$

で表される。ここで添え字 j は $j = s, n$ の時でそれぞれ超伝導、常伝導を表すことにする。この式の実部と虚部は

$$\sigma_{1j}(\omega) = \frac{n_j e^2 \tau_j}{m}\frac{1}{1 + \omega^2\tau_j^2} \tag{28}$$

$$\sigma_{2j}(\omega) = \frac{n_j \omega e^2 \tau_j^2}{m}\frac{1}{1 + \omega^2\tau_j^2} \tag{29}$$

となる。ここで σ_{1j} に対して初等的な積分計算を実行することにより、

$$\int_0^\infty \sigma_{1j}(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2}\frac{n_j e^2}{m} \tag{30}$$

という総和則が成り立つ[4] ことがわかるので、

$$\sigma_{1s}(\omega) = \frac{\pi}{2}\frac{n_s e^2}{m}\delta(\omega) \tag{31}$$

[4] $\int_0^\infty \sigma_{1j}(\omega)d\omega$ が τ_1 に依らず一定の値となる。

となる[5]。また σ_{2s} では総和則は成り立たないが、$\tau_s \to \infty$ における極限値は

$$\sigma_{2s}(\omega) = \frac{n_s e^2}{m\omega} \tag{32}$$

となる。
通常周波数は十分小さく、$\omega\tau_n \ll 1$ と仮定されているので、この場合の電場に対する 2 流体を合体した応答は

$$\begin{aligned}\sigma_1(\omega) &= \sigma_{1s}(\omega) + \sigma_{1n}(\omega) = \frac{\pi}{2}\frac{n_s e^2}{m}\delta(\omega) + \frac{n_n e^2 \tau_n}{m} \quad (33)\\ \sigma_2(\omega) &= \sigma_{2s}(\omega) + \sigma_{2n}(\omega) = \frac{n_s e^2}{m\omega} \quad (34)\end{aligned}$$

で記述されることになる。
以上より $\omega \neq 0$ ならば正常流体の効果が効いてきて散逸を与えることがわかる。

2.5.2 High-Frequency Dissipation in Superconductors

ここでは高周波電流に対する超伝導体の応答を調べるために、近似的な二流体モデルの複素伝導度 (33) 式、(34) 式を用いる。例えとして、コイルと抵抗を持つ並列な電気回路を考える。これらはアドミッタンス $\frac{1}{i\omega L}$、リアクタンス $\frac{1}{R}$ であるので、

$$I = \frac{V}{i\omega L} + \frac{V}{R} \tag{35}$$

となるので、特性周波数 $\omega_0 = \frac{R}{L}$ 以下での電流の流れはコイルの方が優勢で、特性周波数以上では抵抗の方が優勢となる。超伝導の場合も全く同様に考えれば電流の比は

$$\frac{J_s}{J_n} = \frac{\frac{n_s e^2}{m\omega}}{\frac{n_n e^2 \tau_n}{m}} = \frac{n_s}{n_n \omega \tau_n} \tag{36}$$

となる。電気回路の特性周波数に対応する境界領域での周波数は

$$\omega \approx \frac{n_s}{n_n}\frac{1}{\tau_n} \tag{37}$$

となる。
以上より低い周波数ではほとんどの電流は超伝導電流として運ばれるが、どんなに低い周波数でもゼロでなければ正常成分からの損失はゼロではないことがわかる。
それでは今の議論を定量化することを考える。そのためにまず交流電流密度 J を流すと、単位体積あたりの損失電力は

$$\rho J^2 = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sigma}\right)J^2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}J^2 \approx \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2}J^2 \tag{38}$$

[5] 超伝導では $\tau_s \to \infty$ とするため ω が有限の値では $\sigma_{1s} = 0$ となる。

となる。ただしここで $\sigma_1 \ll \sigma_2$ とした。単純化した議論だが、これより二つの重要な一般的な結論が得られる。

- 損失の周波数は ω^2 に依存する。(38) 式より損失電力は $\sigma_1 E^2$ で σ_1 は ω に依存しないので電場 E が ω に比例することがわかる。
- 散逸は σ_1 に比例する。これは正常電子が電場のエネルギーを散逸する機構を与えるからである。

以上の議論の具体的な例としてマイクロ波空洞共振器の壁を作っているような超伝導体表面の抵抗と吸収率を考える。今電磁波は x 負方向から正方向に進行しているとして、電場は y 方向、磁場は z 方向であるとする。さらに $x > 0$ で超伝導体の壁が存在し、$x < 0$ では自由空間であるとする。金属のインピーダンスは自由空間に比べて非常に低いのでほとんど完全反射が起こり、表面上で H の極大を持つ定在波が形成される。表面で振動する磁場は入射波と反射波の重ね合わせなので、入射振幅 $H_{\rm inc}$ の 2 倍となる。ここで $0 < x < \delta, y = 0, 0 < z < dz$ の範囲の長方形に対して積分形のアンペールの法則を適用する。

$$\int \boldsymbol{H} d\boldsymbol{r} = \frac{4\pi}{c} \int \boldsymbol{J} d\boldsymbol{S} \tag{39}$$

$$H_z(x=0)dz = \frac{4\pi}{c} J_y dz \delta \tag{40}$$

$$J_y \delta = \frac{cH_{\rm inc}}{2\pi} \tag{41}$$

$$\mathcal{J} \equiv J_y \delta = \frac{cH_{\rm inc}}{2\pi} \tag{42}$$

これより $x < 0, x > 0$ における磁場の不連続性は深さ δ の表皮層を表面膜電流密度 $\mathcal{J}$ が流れることを意味する。したがって R_s を厚さ δ の表面層の単位面積あたりの抵抗 (表面抵抗) とすれば、単位面積あたりの損失電力は $\mathcal{J}^2 R_s$ となる。
ここで表皮の深さ δ と複素伝導度の関係を考える。設定は上と全く同じ状況で考える。Maxwell 方程式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{43}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma \boldsymbol{E} \tag{44}$$

に解

$$E_y(x) = E_0 e^{ikx - i\omega t} \tag{45}$$

$$H_z(x) = H_0 e^{ikx - i\omega t} \tag{46}$$

を代入して E_0、H_0 を消去すると、

$$k^2 = \frac{4\pi i \omega \sigma}{c^2} = -\frac{4\pi\omega}{c^2}\sigma_2 + i\frac{4\pi\omega}{c^2}\sigma_1 \tag{47}$$

となる。ここで $k=k_1+ik_2$ とすれば

$$k^2=(k_1^2-k_2^2)+i(2k_1k_2) \tag{48}$$

となるので (47) 式と比較して k_2 を求めると、

$$k_2^2=\frac{2\pi\omega\sigma_2}{c^2}\pm\frac{2\pi\omega}{c^2}|\sigma| \tag{49}$$

k_2 は実数なので、

$$k_2=\frac{1}{c}[2\pi\omega(|\sigma|+\sigma_2)]^{\frac{1}{2}} \tag{50}$$

となる。一方 $e^{ikx-i\omega t}$ に $k=k_1+ik_2$ を代入すると $e^{-k_2x}e^{ik_1x-i\omega t}$ となるので、電磁場は e^{-k_2x} で減衰することがわかる。磁場侵入長 λ の時と同様にして、表皮層の厚さ δ を

$$\delta\equiv\frac{1}{k_2} \tag{51}$$

で定義することができるので、(50) 式とから

$$\delta=c[2\pi\omega(|\sigma|+\sigma_2)]^{-\frac{1}{2}} \tag{52}$$

であることがわかる。
以上より

$$R_s=\delta^{-1}\mathrm{Re}(\frac{1}{\sigma})=\delta^{-1}\frac{\sigma_1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\approx\delta^{-1}\frac{\sigma_1}{\sigma_2^2} \tag{53}$$

である。
ここで表面の吸収率 $\mathcal{A}$(入射電磁波が吸収される割合) を計算する。入射電磁波のエネルギーとしてポインティングベクトルを用いると、

$$\mathcal{A}=\frac{P_{abs}}{P_{inc}}=\frac{\mathcal{J}^2R_s}{\frac{cH_{inc}^2}{4\pi}}=\frac{c}{\pi}R_s \tag{54}$$

このように表面抵抗は表面の吸収率の直接の目安になっている。
この式を正常金属に適用すると、$\sigma_1=\sigma_n,\sigma_2=0$ であるので、

$$\mathcal{A}_n=\left(\frac{2\omega}{\pi\sigma_n}\right)\propto\omega^{\frac{1}{2}} \tag{55}$$

一方超伝導体に適用すると、

$$\mathcal{A}_s\approx\frac{c}{\pi}\frac{\sigma_1}{\sigma_2^2}\frac{[2\pi\omega(|\sigma|+\sigma_2)]^{\frac{1}{2}}}{c}\approx\frac{c}{\pi}\frac{\sigma_1}{\sigma_2^2}\frac{[2\pi\omega2\sigma_2]^{\frac{1}{2}}}{c}=\frac{2\sigma_1\omega^{\frac{1}{2}}}{\sigma_2^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}}\propto\omega^2\sigma_1 \tag{56}$$

となるが、ω^2 と σ_1 に比例するという一般的な結果と一致している。正常金属と超伝導体の吸収率の差はエネルギーギャップの周波数よりも十分低くて

も、周波数を増やせば増やすほど狭くなっていき、エネルギーギャップよりも高い周波数では $\mathcal{A}_s$ は $\mathcal{A}_n$ に等しくなるまで急速に増大する。この吸収率は典型的には 10^{-3} よりも小さく、超伝導体では 10^{-10} のオーダーなのでそれを一回の反射で測定することは困難であるが、超伝導壁を持つマイクロ波空洞共振器内では吸収が増幅される。実験的には Q 値[6] (半値幅の逆数) を用いて近似的に $\mathcal{A}$ と関連づけることができる。

$$Q = \frac{\text{蓄えられたエネルギー}}{1\text{ ラジアンあたりの損失}} \tag{57}$$

$$= \frac{\frac{H^2}{8\pi}V}{\frac{c}{4\pi\omega}H^2\mathcal{A}S} = \frac{\omega V}{2cS\mathcal{A}} \approx \frac{L}{\lambda\mathcal{A}} \approx \frac{1}{\mathcal{A}} \tag{58}$$

ここで V は体積、S は表面積、$L = \frac{V}{S}$、λ は電磁波の波長である。最後の近似は空洞が最低次のモードで動作するときに限り有効である。このようにかなり大雑把な近似にも関わらず吸収率と空洞共振器の Q 値の間の関係に対してある程度の情報を与える。超伝導空洞共振器では Q 値は 10^{10} 程度で正常金属では $Q < 10^4$ なので、超伝導体では吸収率は極端に小さいことがわかる。

[6] 振動・波動 小形正男 (裳華房)