超伝導の準古典理論について

加藤雄介研　永井佑紀

OUTLINE

- Introduction
- Hamiltonian
- Gor'kov方程式
- 準古典理論とは
- Eilenberger方程式
- 不純物が存在する場合
- S波の不純物効果-アンダーソンの定理の証明-
- 今後の展開:tripletへの適用

Introduction 1

超伝導に関する理論

London理論

最初の超伝導理論

London方程式二つで
マイスナー効果を記述

GL理論

臨界温度近傍の理論
界面近傍等、
空間変化のある系で力を発揮

BCS理論

超伝導の微視的機構を明らかにした

Introduction 2

BCS理論

Vortex、不純物、界面等の空間変動がある場合

Green関数の運動方程式に着目

Gor'kov方程式

解くと

Green関数

核磁気緩和率
状態密度　etc.

粒子と正孔の確率振幅に着目

Bogoliubov-de Gennes方程式

解くと

粒子と正孔の確率振幅

Hamiltonian

BCS-Hamiltonian

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \psi^\dagger(\boldsymbol{r}) h(\boldsymbol{r}) \psi(\boldsymbol{r}) d^3\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\int\int \psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r}) \psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{r}') v(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \psi_\beta(\boldsymbol{r}') \psi_\alpha(\boldsymbol{r}) d^3\boldsymbol{r} d^3\boldsymbol{r}'$$

相互作用ポテンシャルが波数に依らない。

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{BCS}} = \int \left[-\psi_\alpha^\dagger \frac{\nabla^2}{2m} \psi_\alpha + \frac{g}{2} \psi_\beta^\dagger \psi_\alpha^\dagger \psi_\alpha \psi_\beta \right] d^3\boldsymbol{r}$$

注: α 、β は和をとる。

Gor'kov方程式

Green関数に関する運動方程式

行列表示-スピン一重項(Singlet pairing)の場合-

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) & -\Delta(x) \\ \Delta^*(x) & \left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(x,x') & F(x,x') \\ -F^\dagger(x,x') & \hat{G}(x,x') \end{pmatrix} = \delta(x-x') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定義

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(x,x') &\equiv -\langle \mathrm{T}_\tau \psi_\alpha(x)\psi^\dagger_\beta(x')\rangle \\ \bar{G}_{\alpha\beta}(x,x') &\equiv \langle \mathrm{T}_\tau \psi^\dagger_\alpha(x)\psi_\beta(x')\rangle \\ F_{\alpha\beta}(x,x') &\equiv \langle \mathrm{T}_\tau [\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')]\rangle \\ F^\dagger_{\alpha\beta}(x,x') &\equiv \langle \mathrm{T}_\tau [\psi^\dagger_\alpha(x)\psi^\dagger_\beta(x')]\rangle \end{aligned}$$

G:温度Green関数（虚時間Green関数）
F:温度異常Green関数

磁場のない一様な場合

容易に解くことができる。

空間変動があるような場合

解析的には困難。

解決策 もう少し近似してみる

準古典理論へ

準古典理論とは part1

エネルギー空間における被積分関数

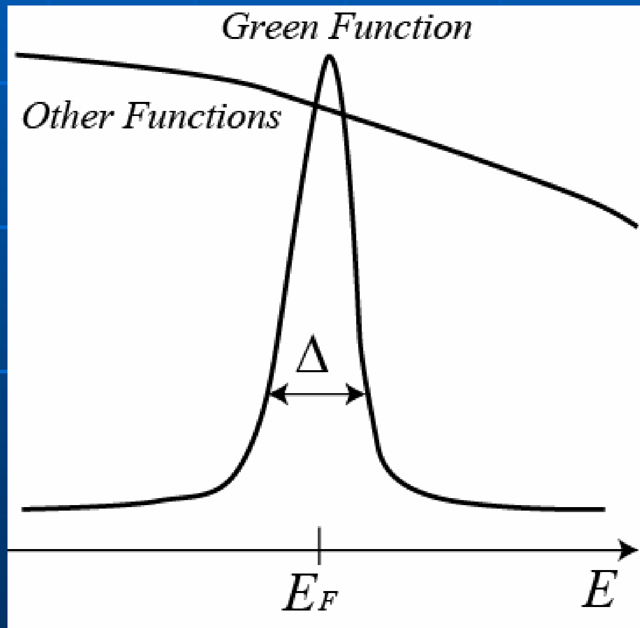
Gor'kov方程式は運動量表示で解く ⟹ 運動量空間での積分が必要

被積分関数の振る舞い

$\Delta << E_F$ であれば

Green関数は $E = E_F$ で強く局在している。

その他の被積分関数はゆるやかに変化している。



Green関数以外のエネルギー依存性を無視

$$F(\hat{\mathbf{p}}, |\mathbf{p}|) \longrightarrow F(\hat{\mathbf{p}}, |\mathbf{p}_F|)$$

Green関数のみが運動量の絶対値に依存 ⟹ **積分を先に実行する**

準古典Green関数の方程式

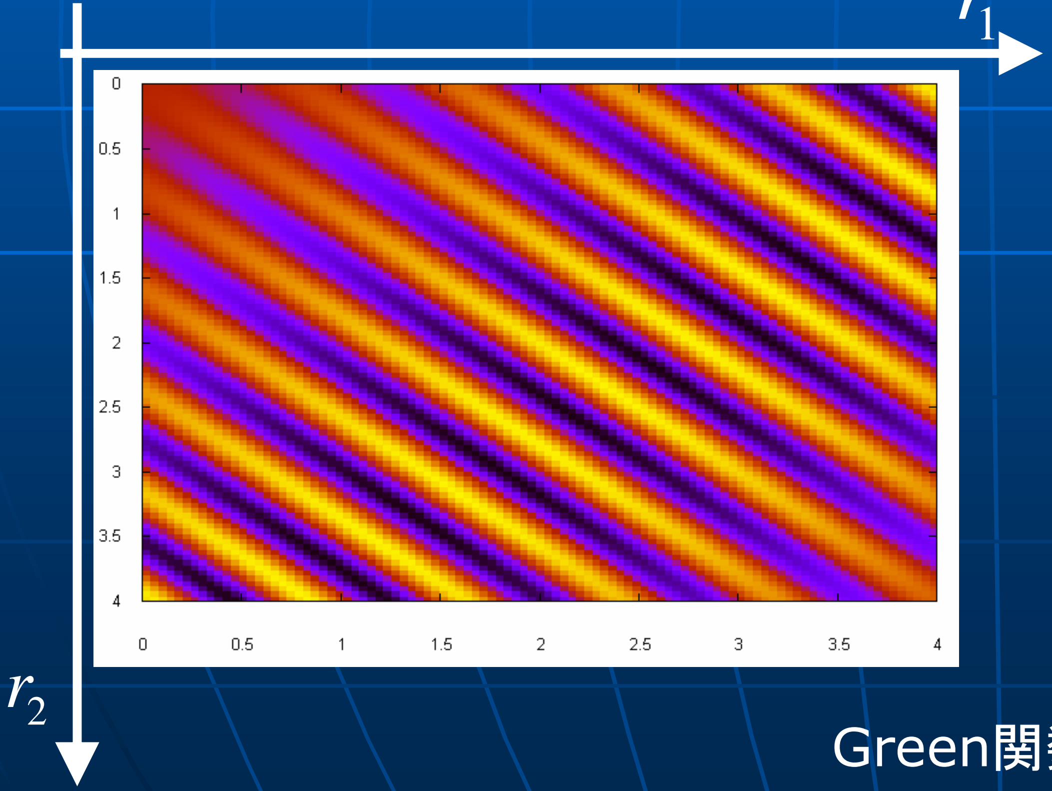
準古典理論とは part2

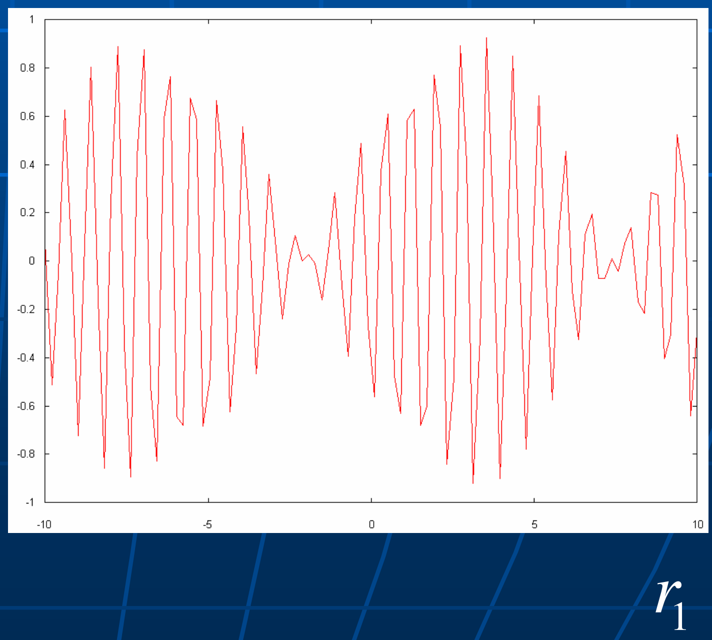
Green関数の振る舞い

Green関数の運動量空間での変動の特徴的長さ:運動量の大きさ<<運動量の方向

座標表示 $G(r_1, r_2)$ は重心座標方向には緩やかであり、相対座標方向には急である。

$\Delta << E_F$ ⟹ $P_F^{-1} << \xi$ **Fourier変換の関係より**





Green関数の変動例

準古典理論とは part3

特徴的な長さスケール

$\Delta << E_F$ であれば

ベクトルポテンシャルA:　λ_L

Pair-potential Δ(r):　ξ

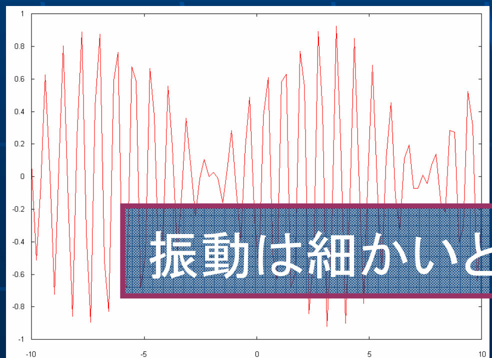
重心座標　$r = (r_1 + r_2)/2$: $1/(p_1 + p_2)$

相対座標　$(r_1 - r_2)$: $1/p_F$

Gor'kov方程式

相対座標に関して0次の近似を行える

Eilenberger方程式



振動は細かいとして包絡線をとる。

r_1

観測する物理量はフェルミ波数の振動を平均している

Eilenberger方程式

準古典Green関数に関する運動方程式

行列表示-スピン一重項(Singlet pairing)の場合-　注：Clean limit

$$
\begin{aligned}
-i\boldsymbol{v}_F\cdot\nabla\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n) &= \left[i\omega_n\sigma^z-\check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r})+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\sigma^z,\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)\right] \\
&= \left[\begin{pmatrix} i\omega_n+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) & -\Delta(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}) \\ \Delta^*(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r}) & -i\omega_n-\frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix},\check{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{r};i\omega_n)\right]
\end{aligned}
$$

G. Eilenberger, Z. Phys. **214**, 195 (1968)

準古典Green関数

$$
\begin{aligned}
\oint\frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i}G(\boldsymbol{p}_+,\boldsymbol{p}_-;i\omega_n) &\equiv g(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k};i\omega_n) \\
\oint\frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i}\bar{G}(\boldsymbol{p}_+,\boldsymbol{p}_-;i\omega_n) &\equiv \bar{g}(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k};i\omega_n) \\
\int\frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i}F(\boldsymbol{p}_+,\boldsymbol{p}_-;i\omega_n) &= \oint\frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i}F(\boldsymbol{p}_+,\boldsymbol{p}_-;i\omega_n)\equiv f(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k};i\omega_n) \\
\int\frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i}F^\dagger(\boldsymbol{p}_+,\boldsymbol{p}_-;i\omega_n) &= \oint\frac{d\xi_{\boldsymbol{p}}}{\pi i}F^\dagger(\boldsymbol{p}_+,\boldsymbol{p}_-;i\omega_n)\equiv f^\dagger(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{k};i\omega_n)
\end{aligned}
$$

Gor'kov方程式より解きやすい

Vortexまわりでの状態密度を解析的に導出できる。

植野洋介、東京大学修士論文(2002)

不純物が存在する場合

不純物が存在するときのEilenberger方程式

$$
\begin{aligned}
i\boldsymbol{v}_F \cdot \nabla \check{g}(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{r}; i\omega_n) &+ \left[i\omega_n \sigma^z - \check{\Delta}(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{r}) + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}_F \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\sigma^z, \check{g}(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{r}; i\omega_n) \right] \\
&= \left[\check{t}, \check{g}_{\mathrm{imt}}(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0; i\omega_n) \right] \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)
\end{aligned}
$$

Source termが付く。

$\check{g}_{\mathrm{imt}}(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0; i\omega_n)$: 不純物なしのときの準古典Green関数

$$
\check{t}(\boldsymbol{r}_0; i\omega_n) = \frac{V_0}{D} \left[\check{1} + V_0 \langle \check{g}_{\mathrm{imt}}(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{r}_0; i\omega_n) \rangle_\Omega \right]
$$

立体角Ωで積分

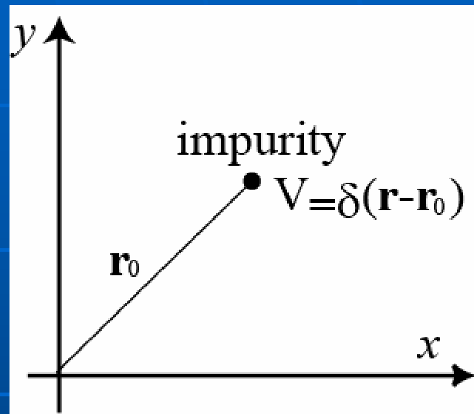
s波超伝導体の場合はどうなるか？

E. V. Thuneberg, et al, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1853

s波超伝導体の不純物効果

磁場なし一様なs波超伝導体

単一の不純物があるときを考える。



Eilenberger方程式の右辺

$$\left[\check{t}, \check{g}_{\rm imt}(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0; i\omega_n)\right]\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

不純物なし磁場なし一様な系でのGreen関数

$$g_{\rm imt}(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{r}; i\omega_n) = -\frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2+|\Delta|^2}}$$

$\check{g}_{\rm imt}(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0; i\omega_n)$ は立体角Ωに依存しない(s波一様な系では)

$$\check{t}(\boldsymbol{r}_0; i\omega_n) = \frac{V_0}{D}\left[\check{1} + V_0\langle \check{g}_{\rm imt}(\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{r}_0; i\omega_n)\rangle_\Omega\right]$$

$\check{t} \propto a\check{1} + b\check{g}_{\rm imt} \longrightarrow$ (右辺)=0

S波超伝導体は不純物の効果を受けない

アンダーソンの定理

今後の展開

Triplet-pairingへの応用

Spin-matrix

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}(\boldsymbol{k}) &= (\boldsymbol{d}(\boldsymbol{k})\cdot\hat{\sigma})i\hat{\sigma}_y \\ &= \begin{pmatrix} -d_x(\boldsymbol{k})+id_y(\boldsymbol{k}) & d_z(\boldsymbol{k}) \\ d_z(\boldsymbol{k}) & d_x(\boldsymbol{k})+id_y(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Green関数がspin成分によって値が異なってくる。

Green関数が2x2の行列に、Gor'kov方程式が4x4の行列に変わる。

Triplet-pairingの超伝導体の
Vortex束縛状態を準古典理論を用いて明らかにする