量子力学III, 物質設計学I　レポート課題III　解答例

(2.16) (2.15) の証明
$\mathcal{F}$ の元は $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \cdots$ の重ね合わせと見ることができるから、$|\Psi^N\rangle (\in \mathcal{F}_N)$ に対して

$$\left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l^\dagger + \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_k^\dagger\right) |\Psi^N\rangle = 0 \tag{1}$$

を示せばよい。状態ベクトル $|\Psi^N\rangle$ を基底ベクトル $|\Phi_{\boldsymbol{n}}^N\rangle$ の線形結合で表し $\left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l^\dagger + \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_k^\dagger\right)$ を作用させれば、

$$\begin{aligned}
& \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l^\dagger + \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_k^\dagger\right) |\Psi^N\rangle \\
= & \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l^\dagger + \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_k^\dagger\right) \sum_{\boldsymbol{n}} c_{\boldsymbol{n}} |\Phi_{\boldsymbol{n}}^N\rangle \\
= & \sum_{\boldsymbol{n}} c_{\boldsymbol{n}} | \left(|\Phi_{k,l,\boldsymbol{n}}^N\rangle + |\Phi_{l,k,\boldsymbol{n}}^N\rangle \right) \\
= & \sum_{\boldsymbol{n}} c_{\boldsymbol{n}} \int \mathrm{d}\xi_1 \cdots \int \mathrm{d}\xi_{N+2} \left(\Phi_{k,l,\boldsymbol{n}}(\xi_1, \cdots, \xi_{N+2}) + \Phi_{l,k,\boldsymbol{n}}(\xi_1, \cdots, \xi_{N+2})\right) |\xi_1, \cdots, \xi_{N+2}\rangle
\end{aligned}$$

を得る。最右辺の式はスレーター行列式の反対称性によりゼロである。これで (1) が示された。これにより (2.16) が示される。ゼロと等価な演算子の随伴演算子もゼロと等価である。これより (2.15) も示される。

(2.15), (2.16) の解答終わり

(2.17) の証明
$|\Psi\rangle = |\Phi_{\boldsymbol{n}}^N\rangle$ のときに示せばよい。

$$\begin{aligned}
\hat{a}_k \hat{a}_l^\dagger |\Phi_{\boldsymbol{n}}^N\rangle &= \hat{a}_k |\Phi_{l,n_1,n_2,\cdots}^{N+1}\rangle \\
&= \delta_{k,l} |\Phi_{\boldsymbol{n}}^N\rangle + \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \, \delta_{k,n_i} \underbrace{|\Phi_{l,n_1,\cdots,n_{i-1},n_{i+1},\cdots,n_N}^N\rangle}_{\hat{a}_l^\dagger |\Phi_{\boldsymbol{n}-n_i}^{N-1}\rangle} \\
&= \delta_{k,l} |\Phi_{\boldsymbol{n}}^N\rangle + \hat{a}_l^\dagger \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (-1)^i \, \delta_{k,n_i} |\Phi_{\boldsymbol{n}-n_i}^{N-1}\rangle}_{\hat{a}_k |\Phi_{\boldsymbol{n}}^N\rangle} \\
&= \left(\delta_{k,l} + \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_k\right) |\Phi_{\boldsymbol{n}}^N\rangle
\end{aligned}$$

(2.17) の解答終わり