

振動・波動論 演習問題 (振動編 ; ばねと振り子づくし)(担当 : 加藤雄介)
2005.11.25

1-1 単振動を生じる系における強制振動のモデル

講義では時間に依存する外力 $F(t)$ を与えた場合の強制振動を考察したが、実際にはヨーヨーの強制振動の場合のように、振動系の一部を周期的に移動して強制振動を起こす場合が多い。その場合の運動方程式とその解析を考える。図 1 のような状況で、右側のばねの右端を

$$X(t) = a \cos \omega t \tag{1}$$

で強制的に振動させる。このとき

1. おもりの運動方程式を書け。
2. 外力 $F(t)$ に相当するものは何か？
3. $x(t) = A \cos \omega t$ とおき、 A を求めよ。
4. A のグラフを書け、

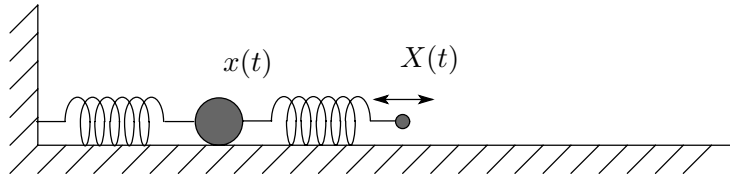


図 1: 振動子の強制振動

1-2 単振り子に対する強制振動のモデル

前問が「ヨーヨーの強制振動」に対応するとすれば、この問題は「傘やハンガーの強制振動」に対応する。図 2 のように振り子の支点を横方向に (1) で揺らすとき、振り子の微小振動に対する微分方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \dots$$

を求めよ。

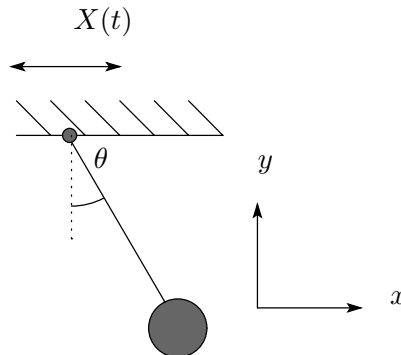


図 2: 単振り子の強制振動

2-1 二つのばねに結ばれたひとつの質点の2次元運動 (関連問題；レポート課題(1))

レポート課題1では二つのばねに結ばれたひとつの質点の横振動を扱った。ここでは2次元運動を扱う。図3のような設定において、おもりの2次元運動を扱う。つりあいの位置からのずれは小さいとして、微小振動について解析せよ。

1. 運動方程式をたて、 x 成分の運動方程式、 y 成分の運動方程式を求めよ。
2. 一般解を求めよ。
3. 初期条件 $x(0) = a, y(0) = b$, 初速度はゼロとして解の軌跡を求めよ (t を消去し、 x と y の関係式を求める)。どんな図形を描くか？

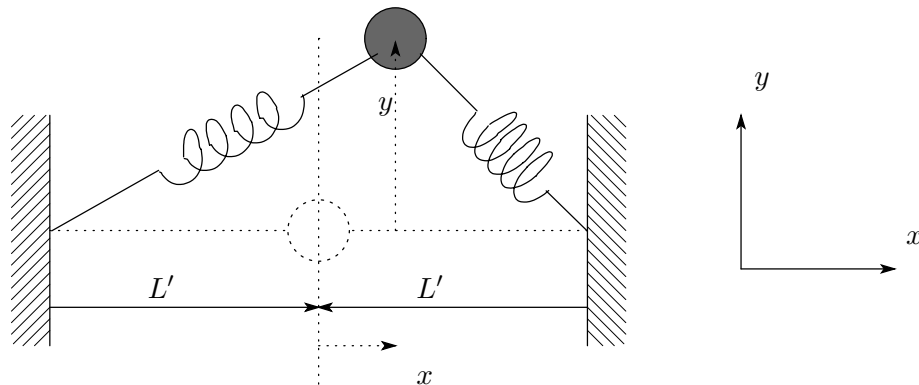


図 3: ばねに結ばれた質点の2次元運動

2-2 二つの質点からなる振り子の微小振動解析

連成振動には講義で扱った以外にもいろいろなバリエーションがある。しかしその実、既習の微分方程式に帰着する場合も多い。以下の場合は今までのどの系に相当するか？

図4に示すように、単振り子を二つ直列に連結した。角度 θ_1, θ_2 は十分小さいものとして、運動方程式を立て、基準振動を求めよ。

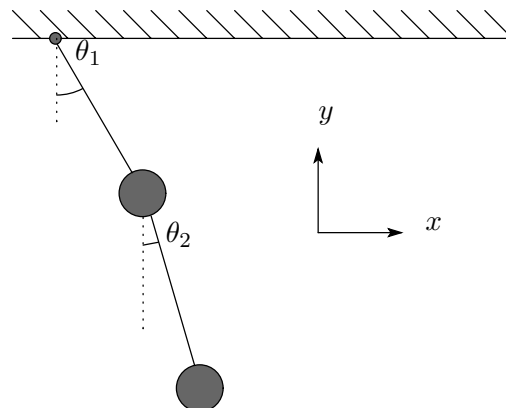


図 4: 二つの質点からなる振り子の微小振動

2-3 2つの質点からなる連成振動系（ばね）における強制振動（関連問題；レポート課題（3））

2粒子系、3粒子系で基準振動を求めて何が面白い？と思う人もいると思う。そこで外から連成振動系に外から外力を加えたときの応答を考察し、そこで基準振動の重要性を感じ取ってもらうことにする。レポート（3）で解析した連成振動系（図5）を外力で揺すったら何が起るか？

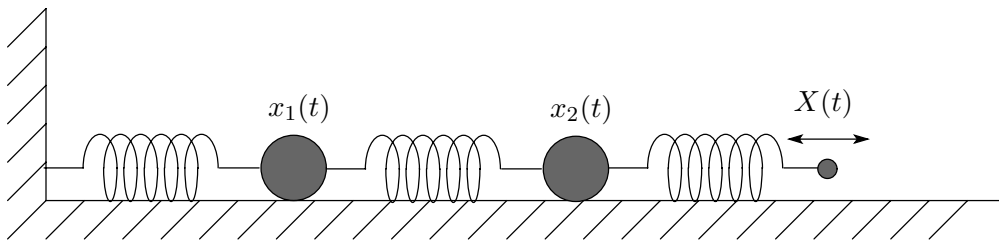


図5: 2つの質点からなる連成振動系（ばね）における強制振動

1. 運動方程式を立てよ。
2. $(x_1(t), x_2(t)) = (A_1 \cos \omega t, A_2 \cos \omega t)$ とおき、 (A_1, A_2) を求めよ。
3. (A_1, A_2) の ω 依存性をグラフに描け。

2-4 2つの質点からなる連成振動系（振り子）における強制振動

図4に示すような直列に連結した単振り子の天井と接触している部分を(1)に従うように横に揺らす。このときの運動方程式を立て、前問と同様の考察をせよ。

2-5 ばねに結ばれた2質点系の2次元的運動

図6に示すような2つの質点からなる振動系を考える。この系の運動方程式をたて、微小振動近似をした場合、 x 方向と y 方向の運動を独立に考えることができることを示せ。また横振動(y 方向)の基準振動を求めよ。

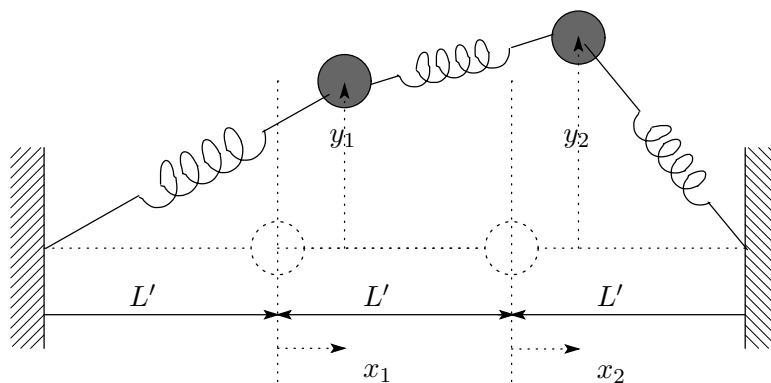


図6: ばねに結ばれた2質点系の2次元的運動

2-6 N粒子系の横振動

講義で、N粒子系のばねの縦振動を解析し、それが波動の理解につながると説明した。波動には縦波と横波があり、弦の振動を理解するにはばねの横振動のモデルを立て、 $N \rightarrow \infty$ とすればよい。前問で見

たように、縦振動と横振動の運動方程式は微小振動近似のもとでは分離できるので、横振動だけが存在すると仮定し、図 7 の状況を考える。このとき、運動方程式をたて、基準振動を求め、基準振動のうち、一番周波数の低いもの、2 番目に低いもの、3 番目に低いもの固有ベクトルを図示せよ。この場合、基準振動が固定端波動系の定在波に相当することが理解できるであろう。

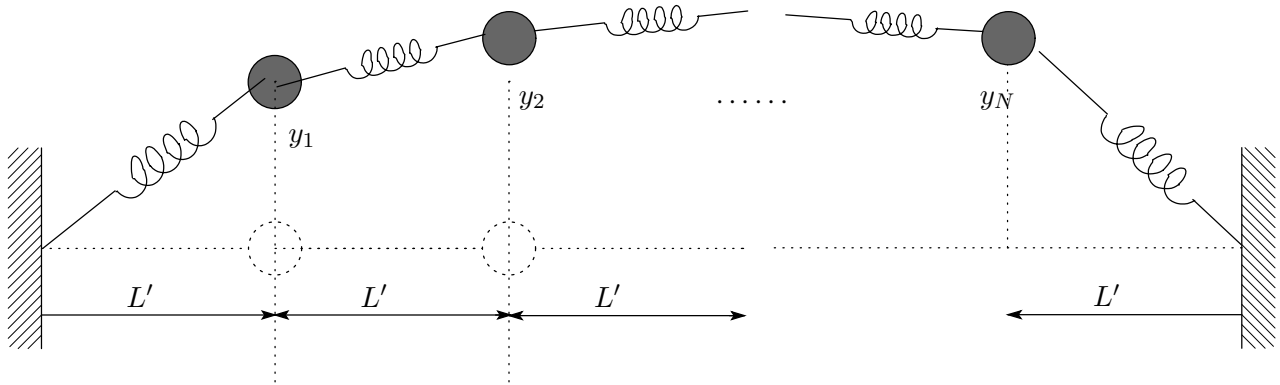


図 7: N 粒子系の横振動