振動・波動論　演習問題（波動編）（担当：加藤雄介）　2005.01.16

以下では弦の張力は T、質量線密度は ρ で場所によらず一定であるものとする。

3-1 無限に続く弦の上の進行波の力学的エネルギー

振幅 $f(x,t)$ が

$$f(x,t) = F(x - vt), \quad v = \sqrt{T/\rho}$$

で与えられる進行波の力学的エネルギーを求めよ。波形 $F(x)$ が図 1 のように与えられるとき、そのエネルギーを求めよ.

3-2 無限に続く弦の上の波動に対するダランベールの解と初期値問題

1. $x \in (-\infty, \infty)$ に存在する弦に対する波動方程式の解のうち、初期値問題 $f_0(x)$, 初期速度分布 $v_0(x)$ を満たす解を求めよ.
2. $v_0(x) = 0$、$f_0(x)$ は図 1 のように与えられるとき、$\tau = \frac{l}{v}$ とおき、時刻

$$t = \frac{\tau}{4}, \quad \frac{\tau}{2}, \quad \frac{3\tau}{4}, \quad \tau$$

における弦の形を図で示せ。

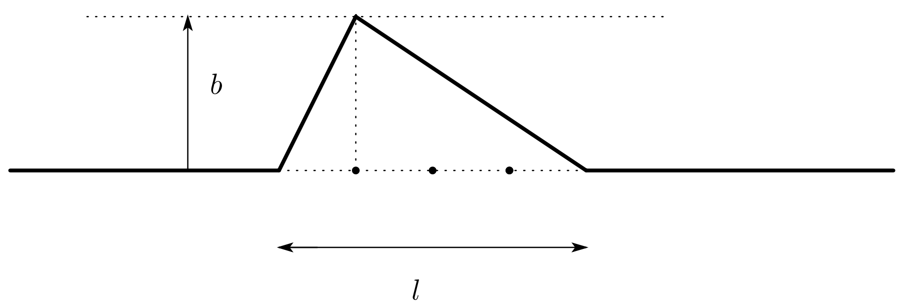

図 1:

3-3　両端固定弦の運動に対する初期値問題

$x \in (0, l)$ に存在する、両端を固定された弦に対する波動方程式の解のうち、初期値問題 $f_0(x)$, 初期速度分布 $v_0(x)$ を満たす解を求めよ

3-4 自由端と固定端を境界とする弦の運動に対するダランベール解

張力 T, 質量線密度 ρ の弦が $x \in (0, l)$ に存在し、左端 $x = 0$ は自由端、右端 $x = l$ は固定端であるとする。

(1). 時刻 t における弦の変位 $y = f(x,t)$ に対する波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

に対するダランベールの解

$$f(x,t) = F(x - vt) + G(x + vt), \quad v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{1}$$

に境界条件を課すと、$x \in (-\infty, \infty)$ における $F(x), G(x)$ の関数形についてどのようなことがいえるか？

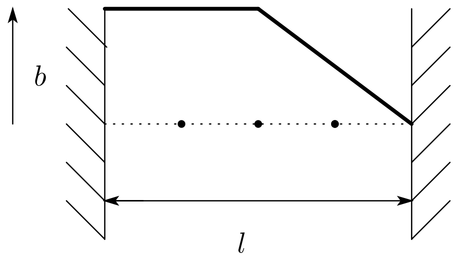

図 2:

(2). この弦を初期波形 $y = f_0(x)$ から、時刻 $t = 0$ で静かに (初速度ゼロで) 離した。このとき、(1) における $F(x)$ を初期波形 $f_0(x)$ を用いて表せ。

(3). 初期波形 $y = f_0(x)$ が図 2 のような形のとき, $\tau = \frac{l}{v}$ とおき、時刻

$$t = \frac{\tau}{4}, \quad \frac{\tau}{2}, \quad \frac{3\tau}{4}, \quad \tau$$

における弦の形を図で示せ。

(4). 基準振動を求めよ。固有振動数の小さい方から数えて 3 番目までの基準振動についてその概形を図示せよ。

(5). この弦のエネルギーを求めよ。

(6). もっとも低い固有振動数をもつ基準振動に分配されるエネルギーは全体の何パーセントか？