振動波動論　レポート課題 (1) 解答

解答作成：小田修太郎 (加藤研 M1)

第 1 問
特性方程式を立てて、それを解けばすぐに基本解は求まる。その線形結合が一般解。

(1) 特性方程式 $\lambda^2+\lambda+2=0$ を解くと、$\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ となるので基本解、一般解は

$$\text{基本解}\quad e^{\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}x}\qquad\text{一般解}\quad C_1e^{\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}x}+C_2e^{\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}x}$$

となる。あるいは

$$\text{基本解}\quad e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x, e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\qquad\text{一般解}\quad C_3e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+C_4e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$$

としてもよい。

(2) 特性方程式 $\lambda^2-9\lambda+20=0$ を解くと、$\lambda=4,5$ となるので基本解、一般解は

$$\text{基本解}\quad e^{4x}, e^{5x}\qquad\text{一般解}\quad C_1e^{4x}+C_2e^{5x}$$

となる。

(3) 特性方程式 $9\lambda^2+12\lambda+4=0$ を解くと、$\lambda=-\frac{2}{3}$(重解) となるから基本解、一般解は $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}$ の形になるので

$$\text{基本解}\quad e^{-\frac{2}{3}x}, xe^{-\frac{2}{3}x}\qquad\text{一般解}\quad C_1e^{-\frac{2}{3}x}+C_2xe^{-\frac{2}{3}x}$$

となる。

第 2 問
特解を求めればいいので何か一つ方程式を満たす解を見つければ十分。なお $\exp x$ は e^x と同値。

(4)$y=Ae^x$ とおいて代入すると

$$\begin{aligned}&9Ae^x+12Ae^x+4Ae^x=e^x\\&\therefore 25Ae^x=e^x\\&\therefore A=\frac{1}{25}\end{aligned}$$

よって特解は

$$y=\frac{1}{25}e^x \tag{1}$$

とすればよい。

(5) 最初は $y = A\cos x$ を代入すればいいと思うかもしれないが、実際にやってみると $\frac{dy}{dx}$ の項から $\sin x$ が出てきてうまくいかない。そこで $y = A\cos x + B\sin x$ を代入することにする。

$$(-A\cos x - B\sin x) + (-A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x + B\sin x) = \cos x$$
$$\therefore (A+B)\cos x + (B-A)\sin x = \cos x$$

両辺の $\cos x, \sin x$ の係数を比べて

$$A + B = 1,\ B - A = 0$$
$$\therefore A = B = \frac{1}{2}$$

よって特解は

$$y = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) \tag{2}$$

とすればよい。

第 3 問

1.(7) 式の左辺は線形であることを用いれば実部と虚部に分けて計算することができる。両辺の実部を比較すると、その実部部分が (6) 式と一致することから $\mathrm{Re}(\tilde{y})$ が (6) 式を満たすことがわかる。なお、$e^{i\omega t}$ は $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ と書ける。

2. そのまま代入して計算すればよい。ただしここでは $B(\omega)$ を実数だとは言ってないので複素数だとして計算することが必要。
よって

$$B(\omega) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\cdot 2\kappa\omega}$$

となる。
3.$B(\omega)e^{i\omega t}$ を 2 の結果を用いて計算し、その実部を求めればよい。$B(\omega)$ は

$$B(\omega) = \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\kappa\omega)^2}(\omega_0^2 - \omega^2 - i\cdot 2\kappa\omega)$$

と書けるので、これに $e^{i\omega t} = \cos x + i\sin x$ をかけて実部をとれば

$$\mathrm{Re}(B(\omega)e^{i\omega t}) = \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\kappa\omega)^2}\{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\kappa\omega\sin\omega t\}$$

となる。あるいは

$$\mathrm{Re}(B(\omega)e^{i\omega t}) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\kappa\omega)^2}}\cos(\omega t + \phi) \quad \left(\tan\phi = \frac{-2\kappa\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

としてもよい。(合成の仕方によって cos が sin になったり、$\tan\phi$ が異なったりするがそれらも正解)

講評

内容がやさしめだったということもあり、みなさんかなりよく出来ていました。

間違えとして多かったのは、まず第 1 問の (1) の特性方程式の計算間違い。2 次方程式の解の公式を用いて解けばよいのですが、$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ や $\lambda = \frac{-1 \pm i}{2}$ という誤答がいくつかありました。
第 2 問の (5) では特解を $y = A\cos x$ と $y = B\sin x$ として別々に計算してそれを足すという誤答がありました。それらを別々に計算して足してしまうと結局は右辺が $2\cos x$ の方程式を解いていることになり、答えが異なってしまいます。正しくは最初から $\cos, \sin$ を組み合わせて $y = A\cos x + B\sin x$ としなければなりません。
第 3 問の 3. では、$B(\omega)$ に $\cos\omega t$ をつけただけで実部としている人がいました。$B(\omega)$ は複素数なので $B(\omega)e^{i\omega t}$ をちゃんと計算してからその実部をとらなければなりません。
また、「虚部」という言葉について勘違いしている人が何人か見受けられました。一般に、複素数 $z = a + bi$ に対して a を z の実部、b を z の虚部と呼びます。つまり、虚部は b なのであって bi ではないのです。別の書き方では $a = \mathrm{Re}(z), b = \mathrm{Im}(z)$ として、$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ とも書きます。