講義中の質問に対する解答（担当：加藤雄介）　2006.12.14

以下の質問と回答は § 反射と透過 II に関するもの。

Q

$Z_1 = Z_2$ で完全反射が起こるとき、力学的エネルギーは本当に保存しているのか？

A

初期波形 $f_0(x)$ として空間的に十分局在しているものを採る。時刻 $t(>)$ が十分大きいとすると,

$$f_0(x) = 0, \quad x \leq -v_1 t \tag{1}$$

が成り立つ。初期時刻 $t=0$ における力学的エネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_1}{2}\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{\partial f_0(x-v_1t)}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{T_1}{2}\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{\partial f_0(x-v_1t)}{\partial xt}\Big|_{t=0}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= T_1\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{\mathrm{d}f_0(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2}$$

で与えられる。一方、十分時間がたったとき、波は弦 2 の上にしかいないので、そのときの力学的エネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_2}{2}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial F_1((x-v_2t)v_1/v_2)}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{T_2}{2}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial F_1((x-v_2t)v_1/v_2)}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= T_2\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\partial F_1((x-v_2t)v_1/v_2)}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる。

$$F_1(x) = \begin{cases} f_0(x), & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \tag{4}$$

に注意し、さらに (3) において $\tilde{x} = (x - v_2 t)v_1/v_2$ とおくと

$$E = \frac{T_2 v_1}{v_2}\int_{-v_1t}^{0}\left(\frac{\mathrm{d}f_0(\tilde{x})}{\mathrm{d}\tilde{x}}\right)^2 \mathrm{d}\tilde{x} = T_1\int_{-v_1t}^{0}\left(\frac{\mathrm{d}f_0(\tilde{x})}{\mathrm{d}\tilde{x}}\right)^2 \mathrm{d}\tilde{x} \tag{5}$$

となる。2 番目の等号で条件 $Z_1 = Z_2$ より $\frac{T_2 v_1}{v_2} = T_1$ を用いた。$\tilde{x}$ はダミー変数なので、以下これを x とおく。(1) が成り立つから、(5) は

$$E = T_1\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{\mathrm{d}f_0(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x \tag{6}$$

と書くこともできる. (6) は $t=0$ における力学的エネルギー (2) と一致する