レポート課題 4 解答例

フーリエ級数展開のグラフ作成

$x \in [0,1]$ に対して定義された関数

$$f(x) = x(1-x) \tag{1}$$

をフーリエ級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \tag{2}$$

の形で表す。

$\sin(n\pi x)$ は $x \in [0,1]$ 上で、整数 n, m に対し

$$\int_0^1 dx \sin(n\pi x)\sin(m\pi x) = \frac{\delta_{nm}}{2} \tag{3}$$

なので、フーリエ級数展開の係数 c_n は

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx f(x)\sin(n\pi x) &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_0^1 dx \sin(m\pi x)\sin(n\pi x) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{\delta_{mn}}{2} = \frac{c_n}{2}\end{aligned} \tag{4}$$

によって与えられ、左辺の積分は部分積分を使って求められる。

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx f(x)\sin(n\pi x) &= \int_0^1 dx\ x(x-1)\sin(n\pi x) \\ &= -\frac{1}{n\pi}\Big[x(1-x)\cos(n\pi x)\Big]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 dx(1-2x)\cos(n\pi x) \\ &= \frac{1}{(n\pi)^2}\Big[(1-2x)\sin(n\pi x)\Big]_0^1 + \frac{2}{(n\pi)^2}\int_0^1 dx \sin(n\pi x) \\ &= -\frac{2}{(n\pi)^3}\Big[\cos(n\pi x)\Big]_0^1 \\ &= \frac{2}{(n\pi)^3}(1-\cos(n\pi))\end{aligned} \tag{5}$$

よって

$$\underline{c_n = \frac{4}{(n\pi)^3}(1-\cos(n\pi))} \tag{6}$$

が得られた。それぞれの n に対しては

$$c_1 = \frac{8}{\pi^3}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{8}{27\pi^3}, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{8}{125\pi^3}, \cdots \tag{7}$$

となっている。

これをグラフィックソフトで描く。Mathematica を用いて描く場合、$y = x(1-x)$ のグラフと $y = \frac{8}{\pi^3}\sin(\pi x)$ のグラフを $x \in [0,1]$ の範囲で描くプログラムの例として、以下のような書き方をする。

レポート課題 4 解答例

```
Plot[{x(1-x),8/Pi^3 Sin[Pi x]},{x,0,1}]
```

このようにしてできたグラフは以下。徐々に $f(x) = x(1-x)$(灰色の線) によく近似されるようになっていることがわかる。

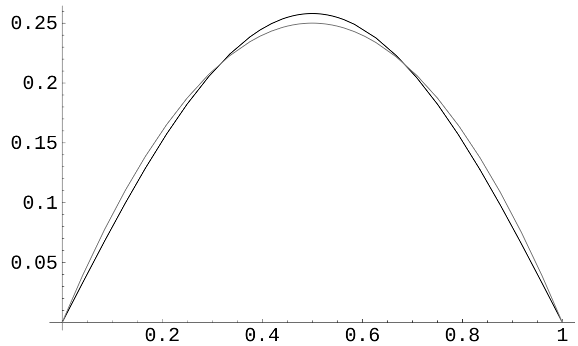

図 1　$n = 1$ までのフーリエ級数 (黒線) と元の $f(x)$(灰色)

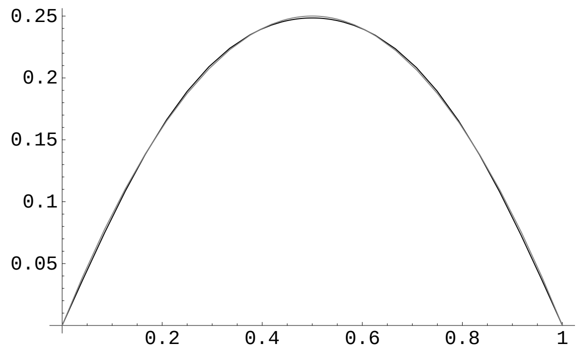

図 2　$n = 3$ までのフーリエ級数 (黒線) と元の $f(x)$(灰色)

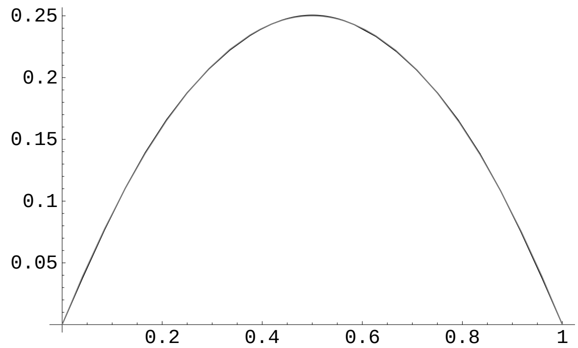

図 3　$n = 5$ までのフーリエ級数 (黒線) と元の $f(x)$(灰色)