レポート課題 2 解答例

第 1 問

問題文で系のパラメータが与えられていないので、おもりの質量は m、ばね定数は左から k_1, k_2、$a>0$ として解く。(ばね定数を同じ値 k としたときの答えは $k=k_1=k_2$ を代入したものであるが、一応答えの横に ( ) をつけて書いておく)

1. **おもりの運動方程式**

おもりの左側のばねから受ける力は $-k_1x(t)$、右側のばねから受ける力は $k_2(X(t)-x(t))$ なので運動方程式は

$$\underline{m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-k_1x(t)+k_2(X(t)-x(t))} \quad \left(m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-2kx(t)+kX(t)\right) \tag{1}$$

2. **外力**

外力に相当するものは右側のばねの右端を $X(t)=a\cos\omega t$ で振動させる力なので

$$F(t)=k_2X(t)=\underline{k_2a\cos\omega t} \quad (ka\cos\omega t) \tag{2}$$

3. A **を求める**

運動方程式に $x(t)=A\cos\omega t$ を代入すれば

$$\begin{aligned} m\frac{d^2}{dt^2}A\cos\omega t &= -k_1A\cos\omega t+k_2(a\cos\omega t-A\cos\omega t)\\ &\Rightarrow -m\omega^2A=-k_1A+k_2(a-A)\\ &\Rightarrow \underline{A=\frac{k_2a}{k_1+k_2-m\omega^2}} \quad \left(A=\frac{ka}{2k-m\omega^2}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

4. A **のグラフ**

ω と A の関係のグラフは図 1 のようになる。

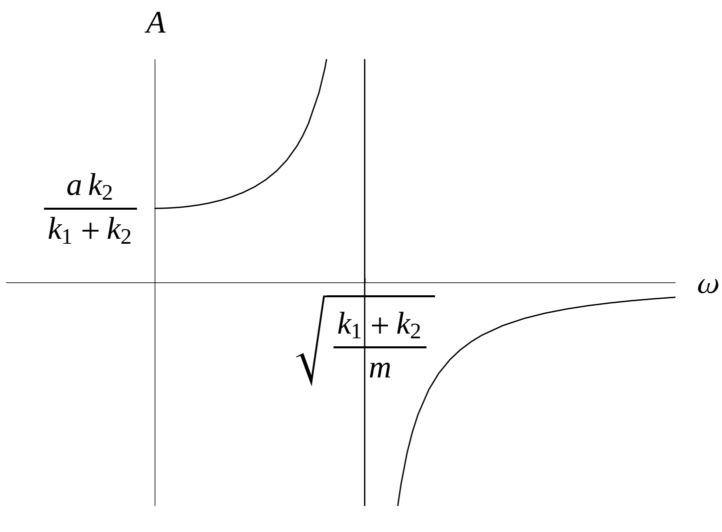

図 1 $\omega-A$

補足: $\omega = \sqrt{(k_1+k_2)/m}$ で A が発散することについて。

この問題では 1. でもとめた方程式に、解を $x(t) = A\cos\omega t$ として方程式を解いたが、この解の形は非同次な運動方程式 (1) の特解であり、一般解の形はこれに同次方程式 ((1) 式で $X(t) = 0$ としたもの) の解をくわえて

$$x(t) = \frac{k_2 a}{k_1+k_2-m\omega^2}\cos\omega t + C_1\cos\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t$$

(C_1, C_2 は初期条件によって決まる定数) となる。この式からもわかるように、$x(t) = A\cos\omega t$ に $\omega = \sqrt{(k_1+k_2)/m}$ を代入したものは同次方程式の解なので、$\omega = \sqrt{(k_1+k_2)/m}$ ではこの形の特解を持たない。この ω での特解としては、

$$x(t) = \frac{k_2 a}{2m\omega}t\sin\omega t$$

のように振幅が時間とともに増加するようなものがある。

第 2 問

ばね定数を左から k_1, k_2, k_3、おもりの質量も左から m_1, m_2 とする。(ばね定数をすべて k、おもりの質量を両方 m としたときの答えは前問と同様 (　) のなかに書く)

1. **運動方程式**

左のおもりについては、左側のばねから $-k_1x_1(t)$、右側のばねから $k_2(x_2(t)-x_1(t))$ の力を受けているので

$$\underline{m_1\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = -k_1x_1(t) + k_2(x_2(t)-x_1(t))} \qquad \left(m\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = -2kx_1(t) + kx_2(t)\right)$$

右側のおもりは、左側のばねから $-k_2(x_2(t)-x_1(t))$、右側のばねから $k_3(X(t)-x_2(t))$ の力を受けているので

$$\underline{m_2\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} = -k_2(x_2(t)-x_1(t)) + k_3(X(t)-x_2(t))} \qquad \left(m\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} = -2kx_2(t) + kx_1(t) + kX(t)\right)$$

2.(A_1, A_2) **を求める**

$(x_1(t), x_2(t)) = (A_1\cos\omega t, A_2\cos\omega t)$ を代入して全体を $\cos\omega t$ で割ると

$$\begin{cases} -m_1A_1\omega^2 & = -k_1A_1 + k_2(A_2-A_1) \\ -m_2A_2\omega^2 & = -k_2(A_2-A_1) + k_3(a-A_2) \end{cases} \tag{4}$$

(4) の上のほうの式から

$$(k_1+k_2-m_1\omega^2)A_1 = k_2A_2 \tag{5}$$

これを下のほうの式に代入して

$$(k_1+k_2-m_1\omega^2)(k_2+k_3-m_2\omega^2)A_1 = k_2^2A_1 + k_2k_3a$$

$$\Rightarrow \underline{A_1 = \frac{k_2k_3a}{(k_1+k_2-m_1\omega^2)(k_2+k_3-m_2\omega^2)-k_2^2}} \quad \left(A_1 = \frac{k^2a}{(2k-m\omega^2)^2-k^2}\right)$$

結果を (5) 式に代入して

$$\underline{A_2 = \frac{(k_1+k_2-m_1\omega^2)k_3a}{(k_1+k_2-m_1\omega^2)(k_2+k_3-m_2\omega^2)-k_2^2}} \quad \left(A_2 = \frac{(2k-m\omega^2)ka}{(2k-m\omega^2)^2-k^2}\right)$$

となる。

3.A_1, A_2 のグラフ

A_1, A_2 の分母 $=0$ の解は 4 つの実数で、これを $\omega = \pm\lambda_1, \pm\lambda_2$ $(0<\lambda_1<\lambda_2)$ とすればグラフは図 2,3 のようになる。$(k=k_1=k_2=k_3$ のときは $\lambda_1 = \sqrt{k/m}, \lambda_2 = \sqrt{3k/m})$

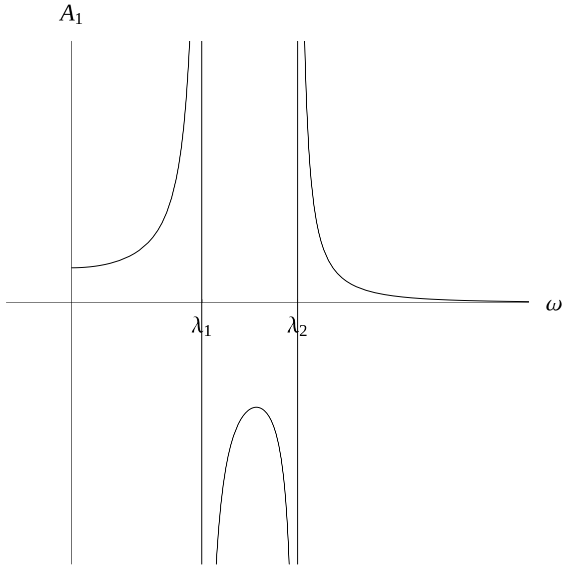

図 2　$\omega - A_1$

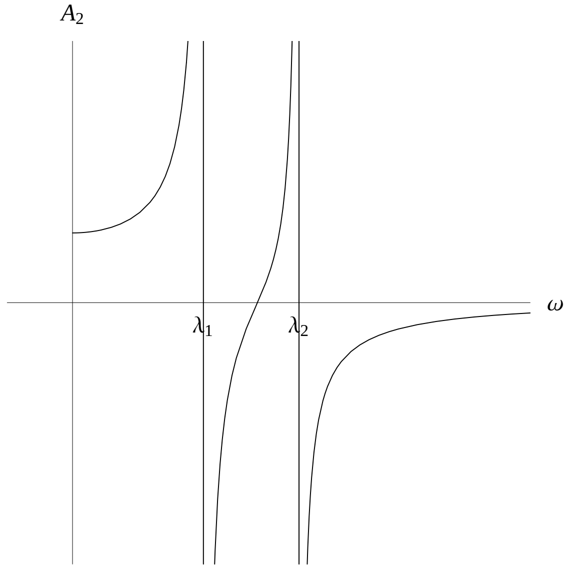

図 3　$\omega - A_2$