

マルチフェロイクス系における 磁性と強誘電性の理論的研究

桂 法称 (学習院大学物理 → 東京大学物理学専攻)

受賞対象論文

- H.K., N. Nagaosa, and A.V. Balatsky, *PRL* **95**, 057205 (2005).
- H.K., A.V. Balatsky, and N. Nagaosa, *PRL* **98**, 027203 (2007).
- H.K., M. Sato, T. Furuta, and N. Nagaosa, *PRL* **103**, 177402 (2009).

Outline

1. Introduction

- 電気磁気効果とマルチフェロイクス
- 巨大電気磁気効果の発見
- 研究の進展

2. 磁気秩序由来の強誘電性

- 強誘電性発現の条件と微視的モデル
- Warming-up: From Hubbard to Heisenberg+DM
- KNB formula, スピンカレントによる解釈

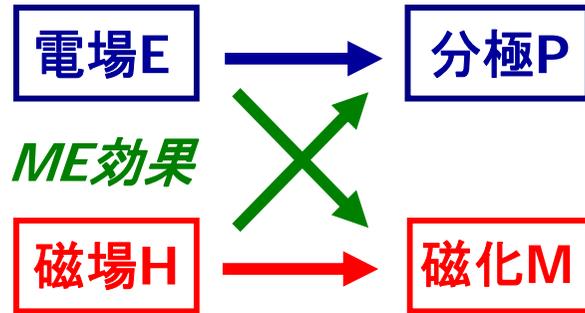
3. 実験結果・他の理論との比較

- いろいろな磁気構造における電気分極
- TbMnO_3 での偏極中性子散乱

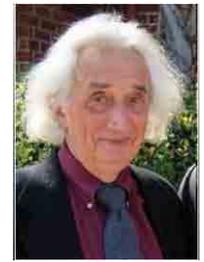
4. まとめ

電気磁気効果とマルチフェロイクス

■ 電気磁気(ME)効果



- P. Curieの予言 (1894)
- Landau & Lifshitz, Dzyaloshinskii (1950s)



線形の電気磁気効果: Cr_2O_3 , ZnCr_2Se_4 , ...

自由エネルギー

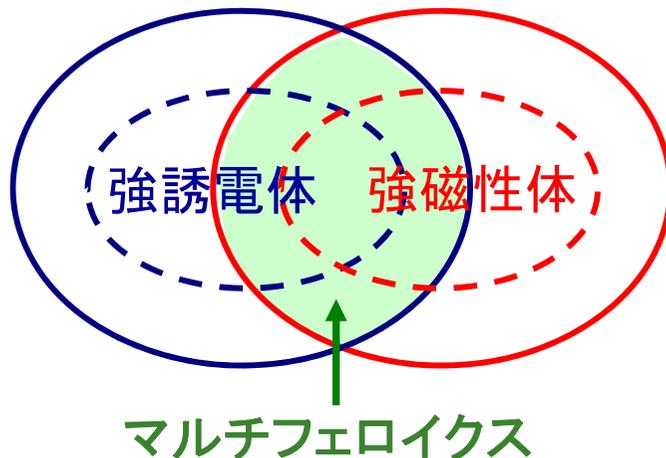
$$-F(\vec{E}, \vec{H}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_i E_j + \frac{1}{2} \mu_0 \mu_{ij} H_i H_j + \boxed{\alpha_{ij} E_i H_j} + \dots$$

$$P_i = - \left. \frac{\partial F}{\partial E_i} \right|_{\vec{E}=0} = \alpha_{ij} H_j$$

~~空間反転~~

~~時間反転~~

■ 磁性と誘電性の共存



But!

- d⁰-ness (mutual exclusion)
BaTiO₃ (Ti⁴⁺): d⁰ ⇔ LaMnO₃ (Mn³⁺): d⁴
- 両者が共存するが出現機構が別
BiMnO₃, BiFeO₃

1. **P**と**M**の結合小, 2. 相転移は独立

Before 2003...

巨大電気磁気効果の発見

■ 希土類Mn酸化物 ($RMnO_3$, RMn_2O_5)

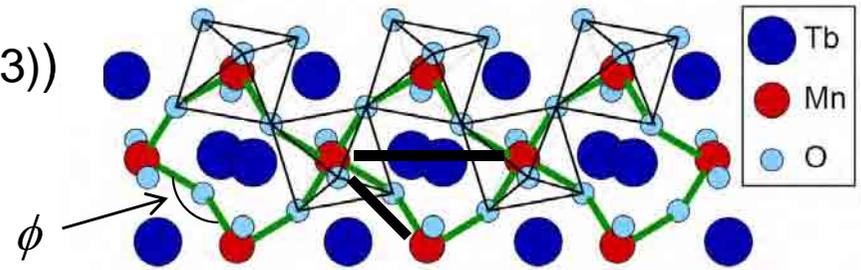
$TbMnO_3$ (Kimura *et al.*, *Nature* **426**, 55 (2003))

i) 低温磁性相での自発電気分極

ii) 磁場による電気分極のフロップ

$P//c \rightarrow P//a$ ($B//b$)

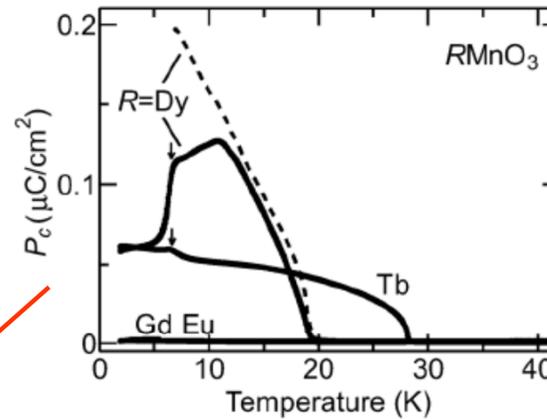
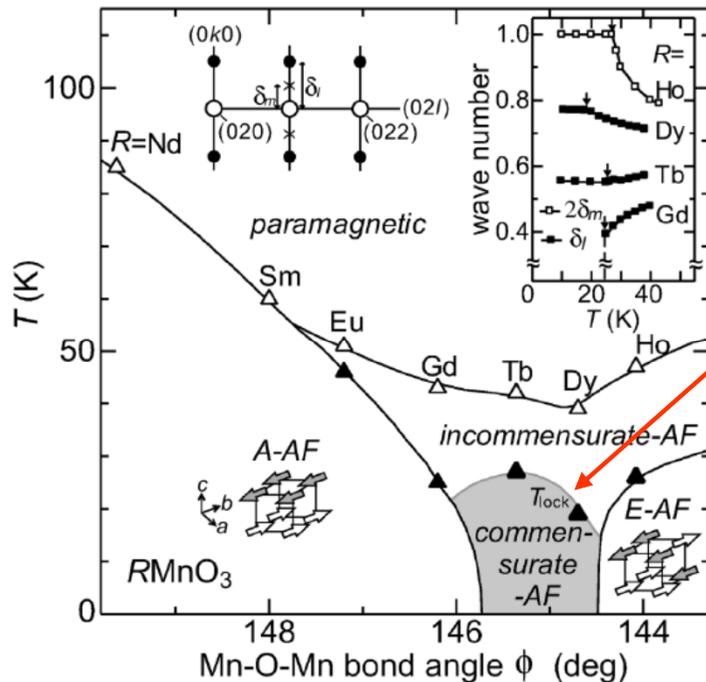
非線形の電気磁気効果!



格子($pbnm$): 反転対称性あり

■ 磁気構造と電気分極

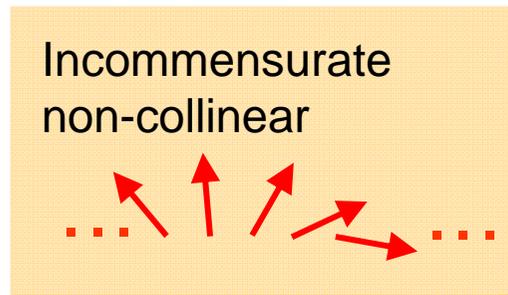
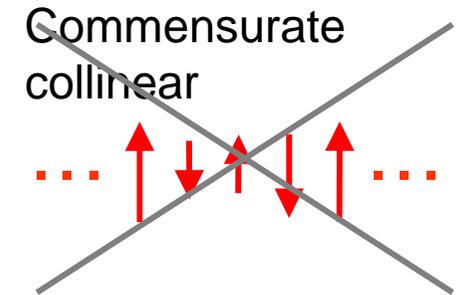
$RMnO_3$ の相図 (Goto *et al.*, *PRL* **92**, 257201 (2004))



中性子線回折:

M. Kenzelmann *et al.* *PRL* **95** ('05).

T. Arima *et al.*, *PRL* **96** ('06).



磁気構造が反転対称性破る!

研究の進展

■ 実験

- 2003 RMnO_3 (Kimura et al.,)
- 磁性由来の電気分極
 - 巨大電気磁気効果
- 2005 TbMnO_3 での中性子散乱
- Kenzelmann et al., *PRL* **95**.
 - Arima et al., *PRL* **96**.

らせん磁気相での強誘電性！

New multiferroics
 $\text{Ni}_3\text{V}_2\text{O}_8$, CoCr_2O_4 , MnWO_4 , LiCu_2O_2 , ...

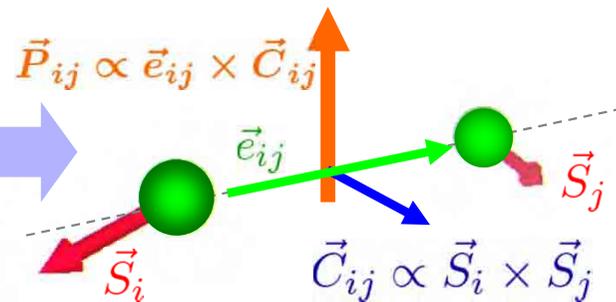
- 2007 TbMnO_3 での偏極中性子散乱
- Yamasaki et al., *PRL* **98**
- 電場駆動のスピンの励起
 RMnO_3 , RMn_2O_5
 S・S由来のエレクトロマグノン

■ 理論

半導体でのスピンHall効果
 Murakami-Nagaosa-Zhang, *Science* **301**.

↓ スピン・軌道相互作用, Berry位相

絶縁体でのスピン流→電気分極
 HK-Nagaosa-Balatsky, *PRL* **95**.



量子スピンHall効果
 Kane-Mele ('05)
Topo. insulator

Topo. ME効果('08)
 Qi-Hughes-Zhang

GL phenomenology
 Mostovoy, *PRL* **96**.

エレクトロマグノンの提案
 HK-Balatsky-Nagaosa, *PRL* **98**

- 2009 Na_2IrO_3 での強相関トポロジカル相
 Shitade, HK, Qi, ..., *PRL* **102**
 G. Jackeli and G. Khaliullin, *PRL* **102**

Outline

1. Introduction

- 電気磁気効果とマルチフェロイクス
- 巨大電気磁気効果の発見
- 研究の進展

2. 磁気秩序由来の強誘電性

- 強誘電性発現の条件と微視的モデル
- Warming-up: From Hubbard to Heisenberg+DM
- KNB formula, スピンカレントによる解釈

3. 実験結果・他の理論との比較

- いろいろな磁気構造における電気分極
- TbMnO_3 での偏極中性子散乱

4. まとめ

磁気秩序に由来する強誘電性発現の条件

■ 空間反転(I)対称性の破れ

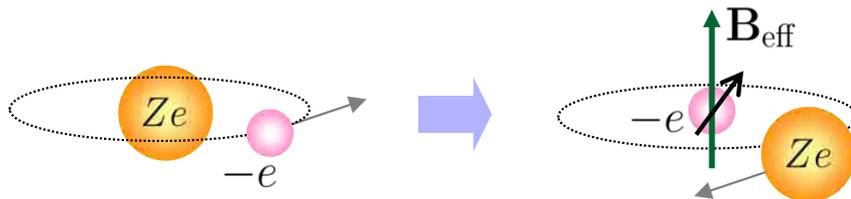
- ・ 電気分極の必要条件
- ・ 磁気構造でも破れる

スピンの変換性

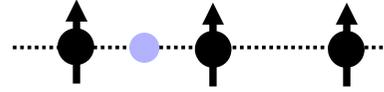
$$I: S \rightarrow S \quad \text{サイトは反転}$$

■ スピン・軌道相互作用

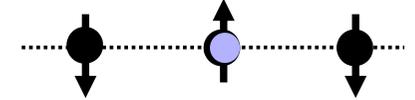
- ・ 軌道部分の I の破れには、**スピンと軌道の混成**が必要！



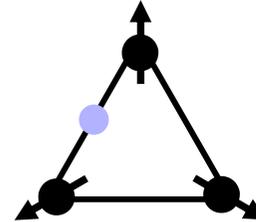
強磁性



反強磁性



Non-collinear



らせん磁性の場合
フラストレーションで実現

■ パリティの異なる軌道の混成

軌道の変換性

$$I: s \rightarrow s, \quad d \rightarrow d, \\ p \rightarrow -p, \quad f \rightarrow -f,$$

$$\text{vacuum} \quad \frac{\hbar}{2m^2c^2} \vec{s} \cdot (\vec{p} \times \nabla U)$$

$$\text{solid} \quad \lambda \vec{l} \cdot \vec{s}$$

電気分極

$$\mathbf{P} = \langle \Psi | q\mathbf{r} | \Psi \rangle$$

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle$$

$$\langle \alpha | \mathbf{r} | \beta \rangle \neq 0$$

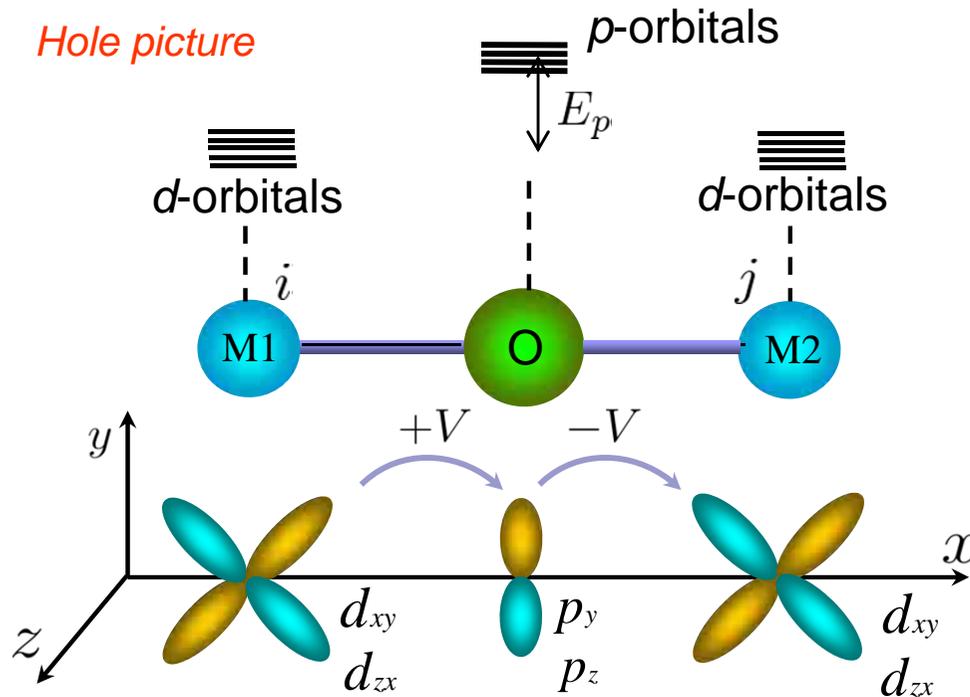
となる α, β が混成
する必要がある。

これらは全て必要条件...

微視的モデル

■ d-p クラスタ

Hole picture



1. 各dサイトにおける結晶場

$t_{2g}-e_g$ splitting $\rightarrow t_{2g}$ のみ考慮

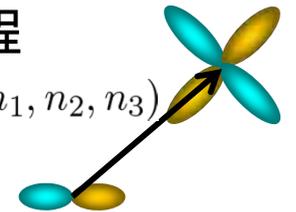
2. 各dサイトにおけるスピン・軌道

$$H_{SO} = i\lambda \epsilon_{lmn} d_{l\alpha}^\dagger \frac{\sigma_{\alpha\beta}^n}{2} d_{m\beta}$$

($l, m, n = yz, zx, xy$)

3. d-p間のホッピング過程

Slater-Koster table (n_1, n_2, n_3)



4. 各サイトのクーロン相互作用

■ Hamiltonian

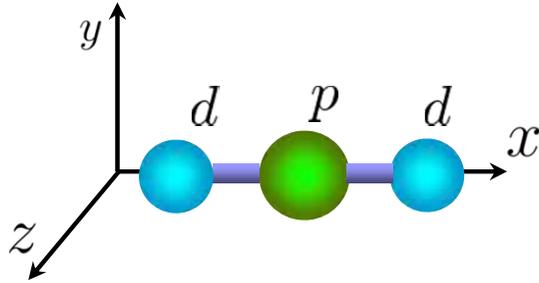
$$H = H_{SO} + H_U + H_O + H_t$$

$$= i\lambda \sum_j \epsilon^{lmn} d_{j,l\alpha}^\dagger \frac{\sigma_{\alpha\beta}^n}{2} d_{j,m\beta} + \frac{1}{2} \sum_j U_{lm'l'm'} d_{j,l\sigma}^\dagger d_{j,m\sigma'}^\dagger d_{j,m'\sigma'} d_{j,l'\sigma} + E_p \sum_{l\sigma} p_{l,\sigma}^\dagger p_{l,\sigma}$$

$$+ V \sum_{\sigma} (p_{y,\sigma}^\dagger d_{1,xy,\sigma} + p_{z,\sigma}^\dagger d_{1,zx,\sigma}) - V \sum_{\sigma} (p_{y,\sigma}^\dagger d_{2,xy,\sigma} + p_{z,\sigma}^\dagger d_{2,zx,\sigma}) + \text{h.c.},$$

電気分極のスピンの表現 – 鶏と卵 –

■ 分極に寄与する行列要素



yの行列要素

d軌道	\vec{r}	p軌道
yz	y	z
xy	y	x

$$I = \langle d_{j,yz} | y | p_z \rangle = \langle d_{j,yz} | z | p_y \rangle$$

$$= \int d^3\mathbf{r} d_{j,yz}(\mathbf{r}) y p_z(\mathbf{r}) \quad \& \text{cyclic permutations.}$$

hoppingの行列要素

d軌道	hop	p軌道
xy	x	y
zx	x	z

d or pでのSOがないと $P_y = P_z = 0$

■ 低エネルギーハミルトニアンと分極

H + symmetry breaking field:

$$H(\vec{E}) = H - \vec{E} \cdot \vec{P}_0 \quad \longrightarrow \quad H_{\text{eff}}(\vec{E}) \quad \text{スピン自由度のみ (Mott ins.)}$$

Half-filled, hopping V に関する摂動

$$-\vec{E} \cdot \vec{P}_0 = -eE_x I \{ (d_{i,xy,\sigma}^\dagger + d_{j,xy,\sigma}^\dagger) p_{y,\sigma} + \text{h.c.} \}$$

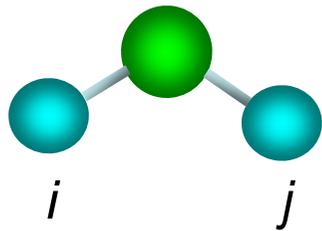
$$-eE_y I \{ (d_{i,yz,\sigma}^\dagger + d_{j,yz,\sigma}^\dagger) p_{z,\sigma} + \text{h.c.} \} + \dots$$

電気分極

$$\vec{P} = - \left. \frac{\partial H_{\text{eff}}(\vec{E})}{\partial \vec{E}} \right|_{\vec{E}=0}$$

Warming up: From Hubbard to Heisenberg+DM (1)

■ Hubbard-type Hamiltonian



~~空間反転~~

時間反転

(on-site)クーロン斥力

$$h_{ij}^U = U(n_i^2 + n_j^2)$$

$$n_i = c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\uparrow} + c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\downarrow}$$

Hamiltonian $h_{ij} = h_{ij}^{\text{hop}} + h_{ij}^U$

スピんに依存したホッピング (b/w $d-d$)

$$h_{ij}^{\text{hop}} = -(c_{i\uparrow}^\dagger, c_{i\downarrow}^\dagger) \begin{pmatrix} t_{\uparrow\uparrow} & t_{\uparrow\downarrow} \\ t_{\downarrow\uparrow} & t_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{j\uparrow} \\ c_{j\downarrow} \end{pmatrix} + \text{h.c.}$$

$$= -(c_i^\dagger T c_j + \text{h.c.})$$

$$T = t_0 \exp(i\theta(\vec{d} \cdot \vec{\sigma})/2)$$

■ ユニタリー変換

$$\begin{cases} f_i = c_i \\ f_j = \exp(i\theta(\vec{d} \cdot \vec{\sigma})/2) c_j \end{cases}$$

$$h_{ij} = -t_0(f_i^\dagger f_j + \text{h.c.}) + U(n_i^2 + n_j^2)$$

$$(n_j = \sum_{\sigma} c_{j\sigma}^\dagger c_{j\sigma} = c_j^\dagger c_j = f_j^\dagger f_j)$$

f_i, f_j に関して通常のHubbard!
反交換関係, 粒子数演算子は不変

スピン演算子

$$\vec{S}_j = c_j^\dagger \frac{\vec{\sigma}}{2} c_j \quad \longrightarrow \quad \vec{\tilde{S}}_j = f_j^\dagger \frac{\vec{\sigma}}{2} f_j$$

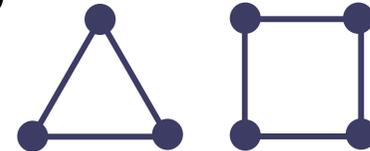
有効Spin Hamiltonian
=Heisenberg model $\frac{4t_0^2}{U} \vec{\tilde{S}}_i \cdot \vec{\tilde{S}}_j$

Warming up: From Hubbard to Heisenberg+DM (2)

■ Dzyaloshinskii-Moriya (DM) 相互作用の導出

新しいスピン \vec{S} でのHamiltonianを元のスピン演算子で表す

- ・元のスピン \vec{S} が物理的な意味をもつ
- ・ループがあると、ユニタリー変換で等方的にできない



\vec{S} と \vec{S} の関係

$$\vec{S}_j = f_j^\dagger \frac{\vec{\sigma}}{2} f_j = c_j^\dagger e^{-i\frac{\theta}{2}(\vec{d}\cdot\vec{\sigma})} \frac{\vec{\sigma}}{2} e^{i\frac{\theta}{2}(\vec{d}\cdot\vec{\sigma})} c_j$$

Useful identity

$$\downarrow \quad e^{-i\frac{\theta}{2}(\vec{d}\cdot\vec{\sigma})} \vec{\sigma} e^{i\frac{\theta}{2}(\vec{d}\cdot\vec{\sigma})} = \cos \theta \vec{\sigma} - \sin \theta (\vec{d} \times \vec{\sigma}) + (1 - \cos \theta) \vec{d} (\vec{d} \cdot \vec{\sigma})$$

$$\vec{S}_j = \vec{S}_j \cos \theta - (\vec{d} \times \vec{S}_j) \sin \theta + \vec{d} (\vec{d} \cdot \vec{S}_j) (1 - \cos \theta), \quad \vec{S}_i = \vec{S}_i$$

Spin Hamiltonian

$$h_{ij}^{\text{spin}} = \frac{4t_0^2}{U} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

$$= \frac{4t_0^2 \cos \theta}{U} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + \frac{4t_0^2 \sin \theta}{U} \vec{d} \cdot (\vec{S}_i \times \vec{S}_j) + \frac{4t_0^2 (1 - \cos \theta)}{U} (\vec{d} \cdot \vec{S}_i) (\vec{d} \cdot \vec{S}_j)$$

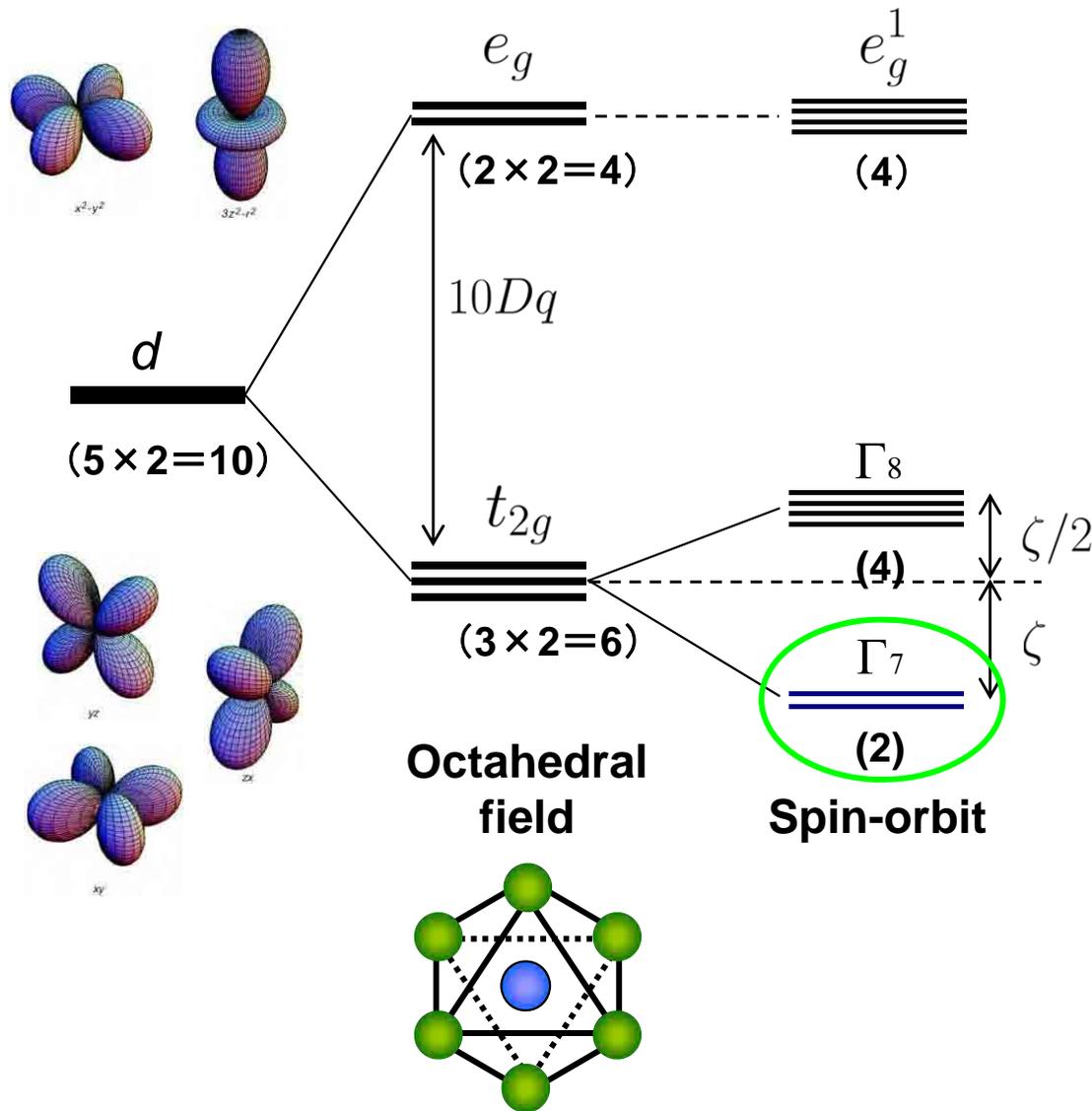
Heisenberg int.

Dzyaloshinskii-Moriya (DM) int.

Kaplan-Shekhtman-Aharony-Entin-Wohlman (KSAE) int.

スピン・軌道が強い極限での解析 $V \ll U \ll 3\lambda/2 (\ll 10Dq)$

■ 1 hole in t_{2g} (simplest case)

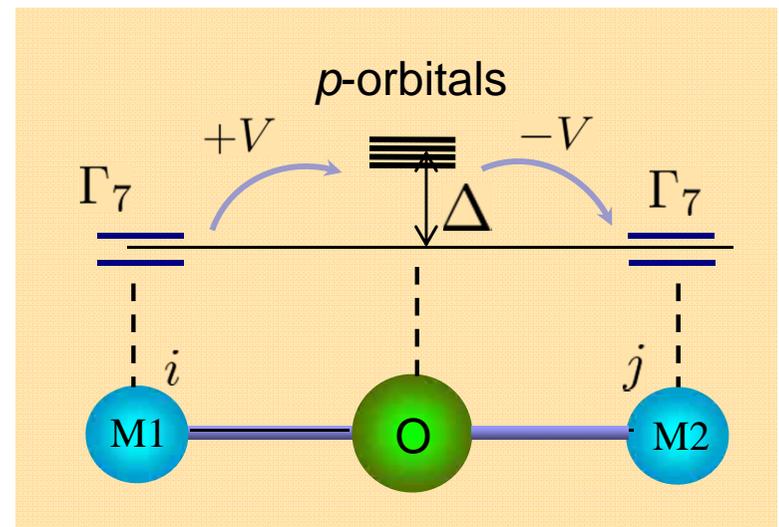


Γ_7 の波動関数

$$\begin{cases} c_{i\uparrow} = \frac{1}{\sqrt{3}}(d_{i,xy,\uparrow} + d_{i,yz,\downarrow} - id_{i,zx,\downarrow}) \\ c_{i\downarrow} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-d_{i,xy,\downarrow} + d_{i,yz,\uparrow} + id_{i,zx,\uparrow}) \end{cases}$$

Effectiveにはspin-1/2系
元のスピンと期待値では対応

クラスターモデル



電気分極のスピンの表現 – KNB formula –

■ Effective Hubbard Hamiltonian for Γ_7

摂動項: 酸素を介するhopping + $\vec{E} \cdot \vec{P}_0$ からの寄与 V/Δ 展開

$$h_{ij} = \frac{2V^2}{3\Delta} c_i^\dagger \begin{pmatrix} 1 - ieE_y I/V & eE_z I/V \\ -eE_z I/V & 1 + ieE_y I/V \end{pmatrix} c_j + \text{h.c.} + U(n_i^2 + n_j^2)$$

x : ボンドの方向 $T = \frac{2V^2}{3\Delta} \left(1 + \frac{ieI}{V} (\vec{E} \times \hat{x}) \cdot \vec{\sigma} \right) \sim t_0 \exp \left(\frac{ieI}{V} \underbrace{(\vec{E} \times \hat{x}) \cdot \vec{\sigma}}_{D\text{-vector}} \right)$

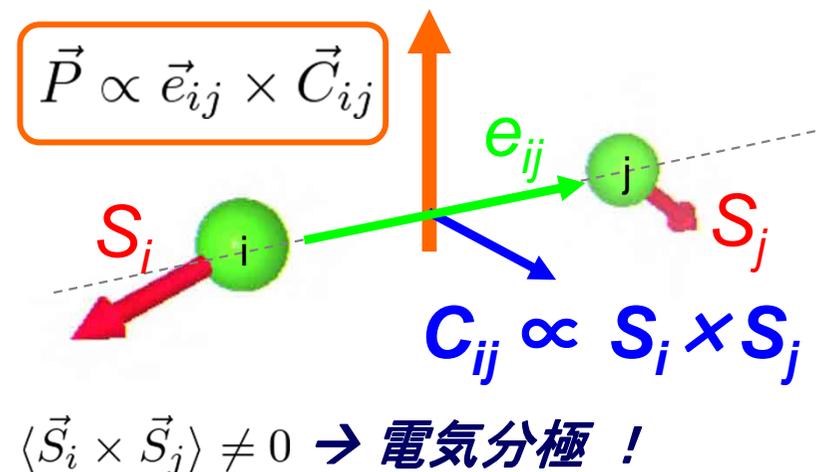
■ Effective Spin Hamiltonian t_0/U 展開

$$h_{ij}^{\text{spin}} = \frac{4t_0^2 \cos \theta}{U} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + \frac{4t_0^2 \sin \theta}{U} \underline{\vec{d} \cdot (\vec{S}_i \times \vec{S}_j)} + \frac{4t_0^2 (1 - \cos \theta)}{U} (\vec{d} \cdot \vec{S}_i) (\vec{d} \cdot \vec{S}_j)$$

電場で現れるDM int. $(\vec{E} \times \hat{x}) \cdot (\vec{S}_i \times \vec{S}_j) = \vec{E} \cdot [\hat{x} \times (\vec{S}_i \times \vec{S}_j)]$

■ 電気分極の表式

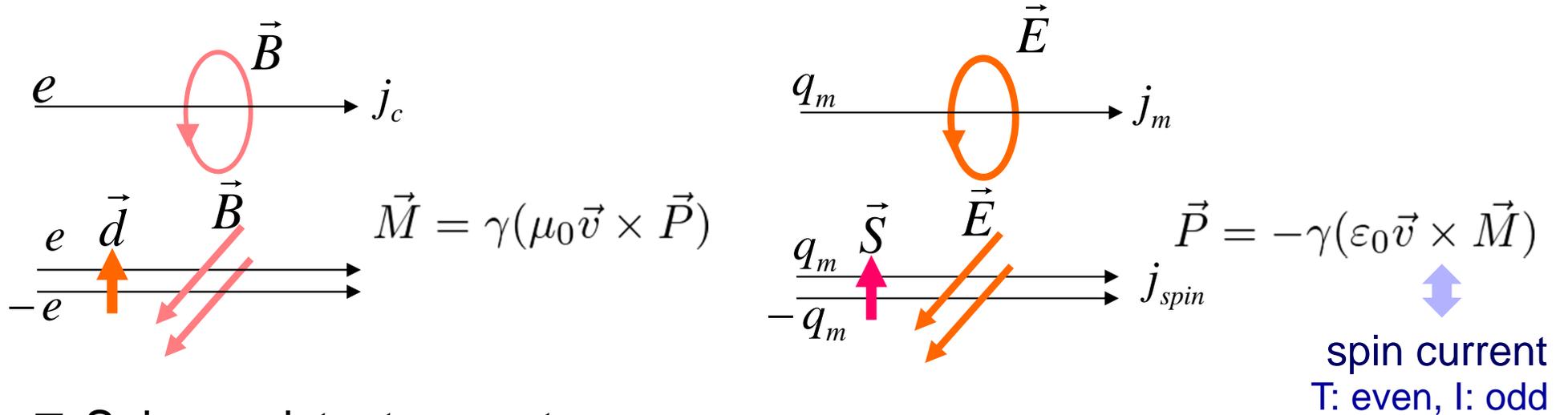
$$\vec{P} = - \left. \frac{\partial h_{ij}^{\text{spin}}}{\partial \vec{E}} \right|_{\vec{E}=0} = - \frac{4}{U} \cdot \frac{8V^3}{9\Delta^2} eI [\vec{e}_{ij} \times (\vec{S}_i \times \vec{S}_j)]$$



スピncurrentによる解釈

- Spin current = motion of magnetic moment

相対論: 電気双極子 \leftrightarrow 磁気双極子



- Spin persistent current

$$H = \sum_{ij} \frac{J_{ij}^{\perp}}{2} (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) + J_{ij}^z S_i^z S_j^z$$

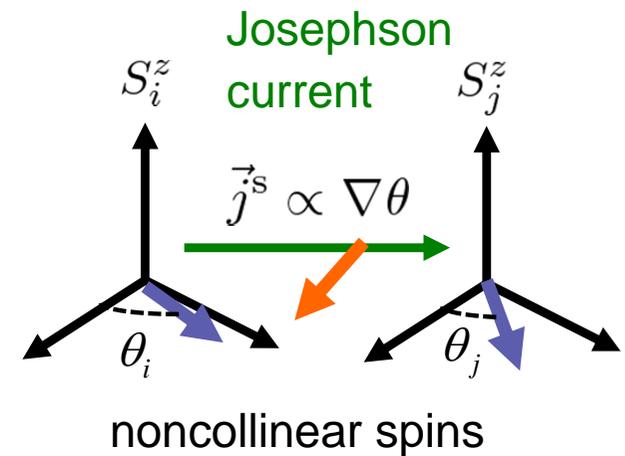
Heisenberg方程式

$$\frac{\partial S_i^z}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H, S_i^z]$$

連続の方程式

$$\frac{\partial S_i^z}{\partial t} + \sum_{j \text{ n.n. } i} j_{ji}^s = 0$$

$\rightarrow j_{ji}^s = \frac{2}{\hbar} J_{ij}^{\perp} (S_i^z S_j^y - S_i^y S_j^z) = \frac{2}{\hbar} J_{ij}^{\perp} (\vec{S}_i \times \vec{S}_j)^z$



Outline

1. Introduction

- 電気磁気効果とマルチフェロイクス
- 巨大電気磁気効果の発見
- 研究の進展

2. 磁気秩序由来の強誘電性

- 強誘電性発現の条件と微視的モデル
- Warming-up: From Hubbard to Heisenberg+DM
- KNB formula, スピンカレントによる解釈

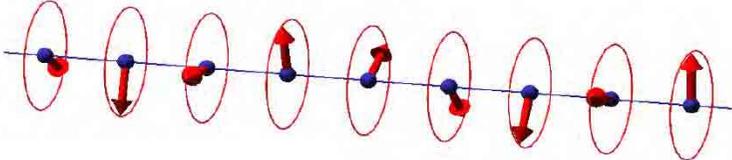
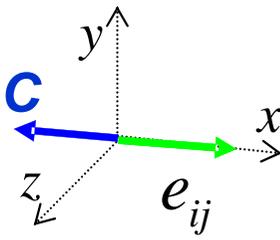
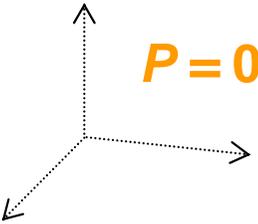
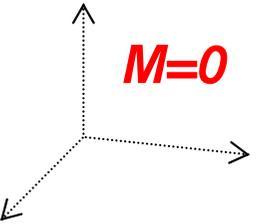
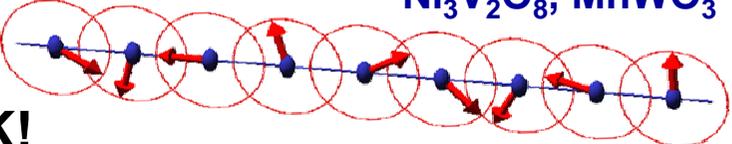
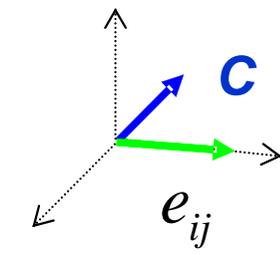
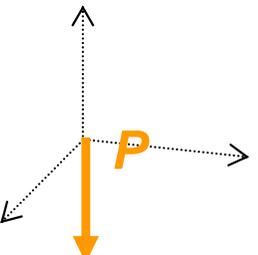
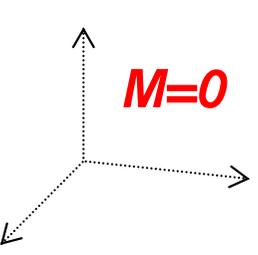
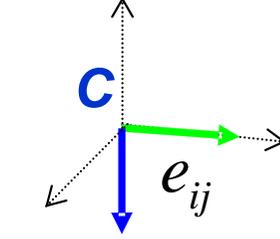
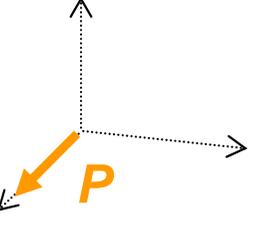
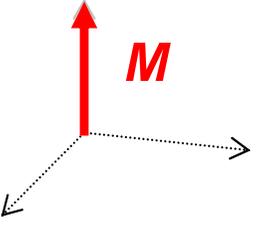
3. 実験結果・他の理論との比較

- いろいろな磁気構造における電気分極
- TbMnO_3 での偏極中性子散乱

4. まとめ

いろいろならせん磁気構造における電気分極の予言

$$P_{ij} \propto e_{ij} \times C_{ij}$$

	e_{ij} & C_{ij}	Polarization	Magnetization
ねじ型 (proper screw) $MnSi, ZnCr_2Se_4$ 			
サイクロイド型 $RMnO_3 (R=Tb, Dy), Ni_3V_2O_8, MnWO_3$ IC OK! 			
円錐型 (横すべり) $CoCr_2O_4$ IC OK! $q_{pol} = q_{mag}$ $Ba_2Mg_2Fe_{12}O_{22}$ (with H) 			

P と M の共存 (本来の意味でのmultiferroics)

$CuFeO_2$ (proper screw), $d-p$ 混成の変調 (T. Arima, *JPSJ* **76**, 073702 (2007))

サイクロイド型らせん磁気秩序相をもつ物質

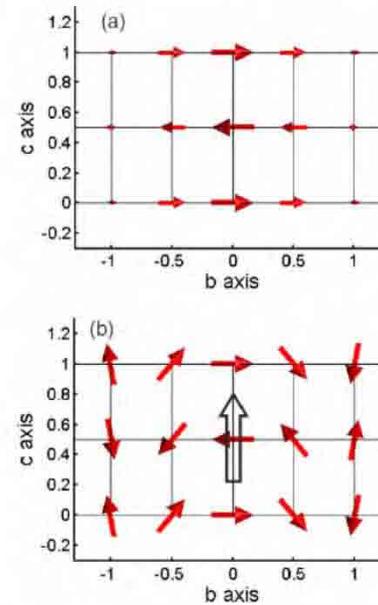
■ TbMnO₃

M. Kenzelmann *et al.*, *PRL* **95**, 087206(2005).

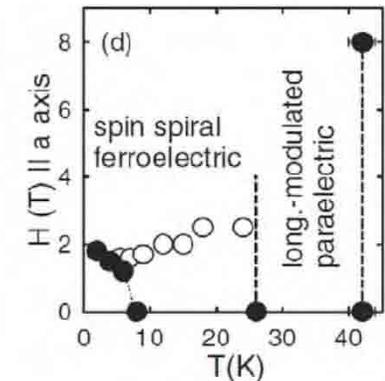
T. Arima *et al.*, *PRL* **96**, 097202 (2006).

$P \sim 800 \mu\text{C}/\text{m}^2$

cf) PbTiO₃ $P \sim 60 \mu\text{C}/\text{cm}^2$



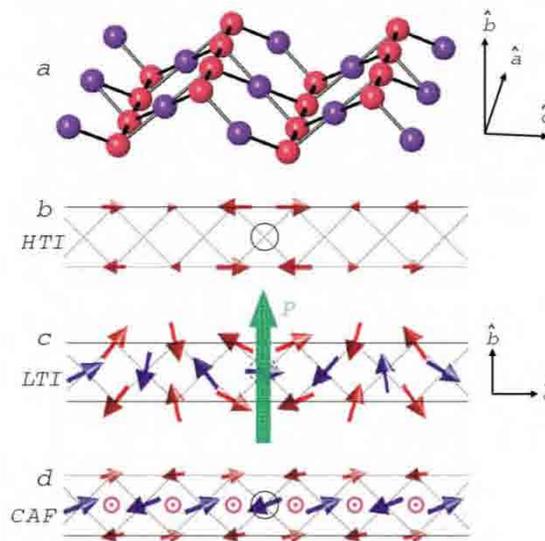
Phase diagram



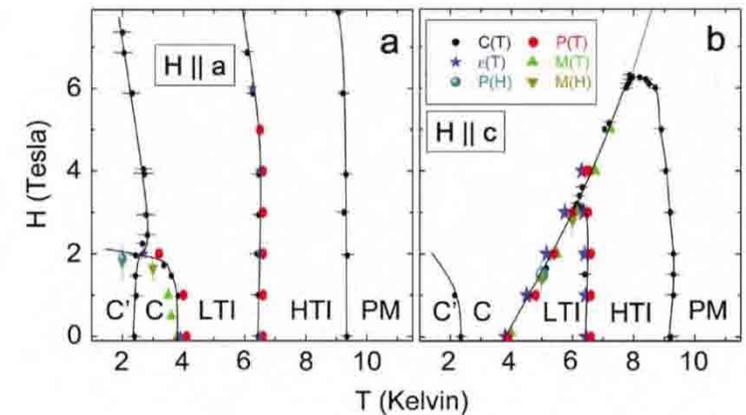
■ Ni₃V₂O₈

G. Lawes *et al.*, *PRL* **95**, 087205 (2005).

$P \sim 120 \mu\text{C}/\text{m}^2$



Phase diagram



サイクロイド型: DyMnO₃, MnWO₄, LiCu₂O₂, LiCuVO₄,...

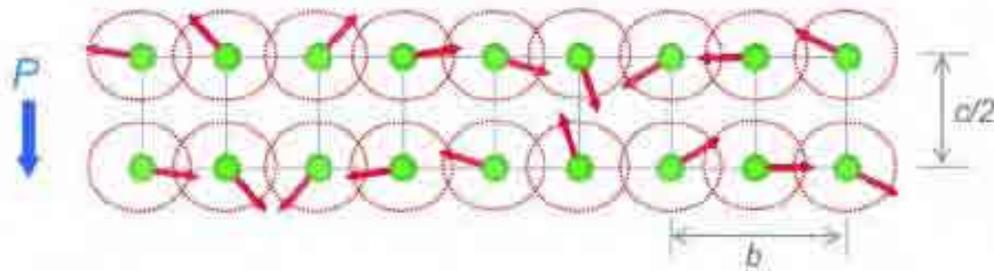
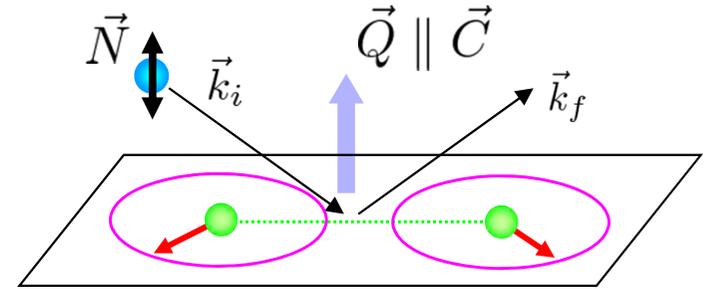
円錐型(横すべり): CoCr₂O₄

TbMnO₃における偏極中性子散乱実験

■ 偏極中性子散乱 Yamasaki et al., PRL 98, (2007)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \sum_{ij} e^{i\vec{Q}(\vec{R}_i - \vec{R}_j)} [\vec{S}_{\perp,j} \cdot \vec{S}_{\perp,i} + i\vec{N} \cdot (\vec{S}_{\perp,j} \times \vec{S}_{\perp,i})]$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\uparrow} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\downarrow} \quad \text{Vector chiralityを直接測れる!}$$



$$S_{\perp,j}^b = S^b \cos(\vec{q} \cdot \vec{R}_j)$$

$$S_{\perp,j}^c = S^c \sin(\vec{q} \cdot \vec{R}_j)$$

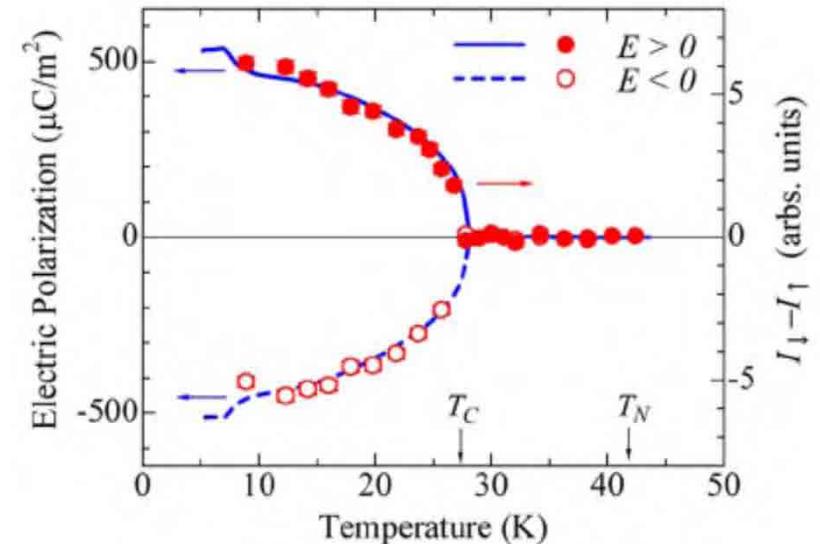
■ スピンカレントモデルとの比較

散乱(積分)強度差 $I_{\uparrow} - I_{\downarrow} = 4I_0^2 S^b S^c$

KNBの予言

$$\vec{P}_{ij} \propto \vec{e}_{ij} \times \vec{C}_{ij} \quad \rightarrow \quad P^c = A_0 \sin(q) S^b S^c$$

- KNBの結果を支持
- 電場によるvector chiralityの反転も確認



その他の理論との比較

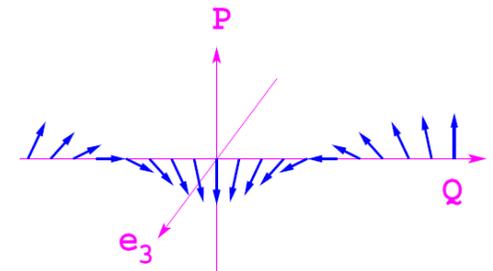
■ 微視的モデルに基づくアプローチ

- Jia, Onoda, Nagaosa and Han (*PRB* **74**('06)) : Hund結合強い極限(λ 摂動)
- Sergienko and Dagotto (*PRB* **73**('06)): 動的Dzyaloshinskii-Moriya (格子の寄与)

■ 現象論的アプローチ, 群論的アプローチ

- Mostovoy (*PRL* **96**('06)), Harris :Ginzburg-Landau理論

$$\Phi_{em}(\mathbf{P}, \mathbf{M}) = \gamma \mathbf{P} \cdot [\mathbf{M} (\nabla \cdot \mathbf{M}) - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \dots].$$

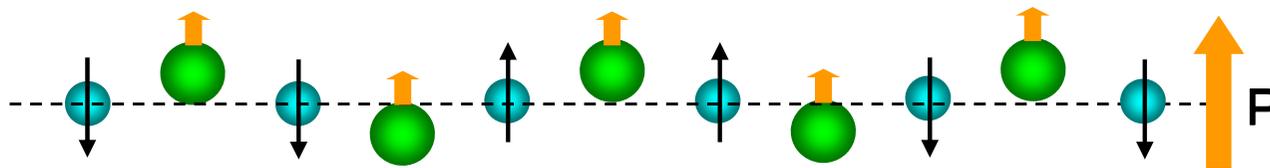


■ 第一原理計算, Berry位相によるアプローチ

- Xiang *et al.*, (*PRL* **101** ('08)), Malashevich and Vanderbilt (*PRL* **101** ('08))

■ その他の機構による磁性由来の強誘電性

- 「逆」金森-Goodenough効果 ($\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$): TbMn_2O_5 , YMn_2O_5



CollinearもOK

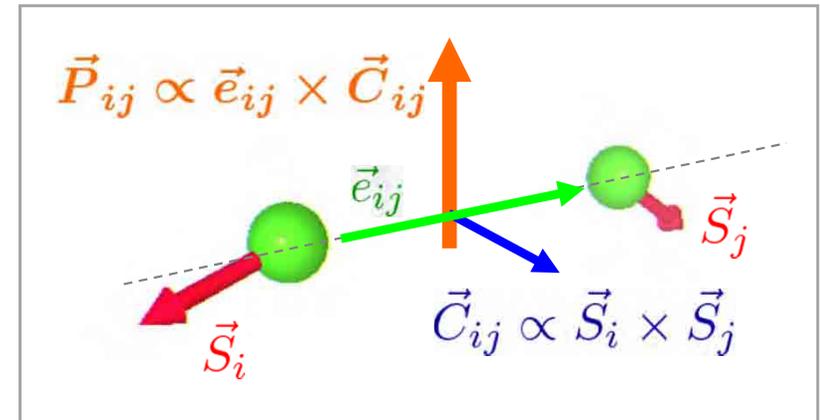
- デラフォサイト型: CuFeO_2 , T. Arima, *JPSJ* **76** ('07))
ねじ型らせん (proper screw) でも出る例

まとめ

■ 磁気秩序に由来する強誘電性の機構

必要条件

- 磁気秩序による反転対称性の破れ
らせん磁性 (frustrationに由来)
- スピン・軌道相互作用
- 異なるパリティの軌道の混成



これらを満たすクラスター上のモデルでの計算

→実際に磁気秩序に由来する強誘電性が可能なことを示した

■ 磁気秩序に由来する強誘電性の機構

- 種々のらせん磁気構造をもつ物質との比較
- TbMnO_3 での偏極中性子散乱実験との比較

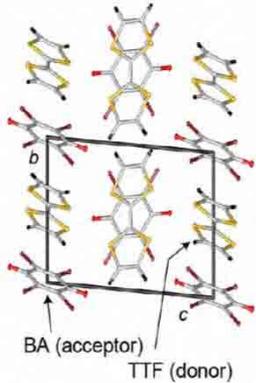
■ (話せなかった話題) エレクトロマグノンと動的電気磁気効果

- マルチフェロイクス系の素励起
- $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ v.s. $\vec{S}_i \times \vec{S}_j$: Staticには消えるものも、揺らぎとしては寄与

その他の話題

■ 1次元強誘電性Mott絶縁体での光学応答

H.K., M. Sato, T. Furuta, and N. Nagaosa, *PRL* **103**, 177402 (2009).



$$P = -\frac{\partial H_{\text{eff}}}{\partial E}$$

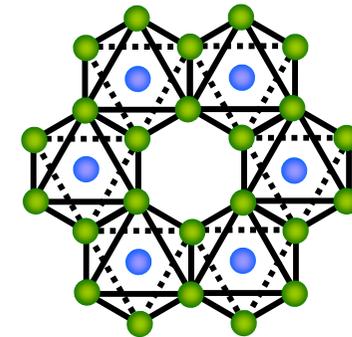
$$= \eta a \sum_i (-1)^i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$$

TTF-BAとsine-Gordonの物理
光学伝導度で見るbreather

■ Ir(5d)酸化物における量子スピンHall効果

A. Shitade, H.K., ..., *PRL* **102**, 256403 (2009).

Na_2IrO_3 : スピン軌道相互作用が大 $\rightarrow \Gamma_7$ に電子1個



■ マグノンの熱ホール効果

H.K., N. Nagaosa, and P.A. Lee, *PRL* **104**, 066403 (2010).

Y. Onose, Y. Ideue, H.K., ..., *Science* **329**, 297 (2010).

DM int. やスカラーカイラリティが起源

$$\vec{D} \cdot (\vec{S}_i \times \vec{S}_j) \quad -\frac{24t^3}{U^2} \sin \Phi \vec{S}_i \cdot (\vec{S}_j \times \vec{S}_k)$$

