

物理数学 III (2021) 第 2 回レポート課題

出題：2021 年 12 月 24 日 締切：2022 年 1 月 19 日

注意事項

1. 問題は全部で 6 問あります。大問 1 から大問 3 は必ず解答して下さい。優、優上が欲しい人は大問 4 から大問 6 の中からいくつか追加で問題を解いて下さい。これらと第 1 回レポート課題、出席を総合的に評価して成績をつけます。
2. 提出先は ITC-LMS (<https://itc-lms.ecc.u-tokyo.ac.jp>) とします。解答した全ての答えを 1 つのファイルにまとめて提出して下さい。
3. 提出に際しては名前と学籍番号を明記して下さい。
4. 読みやすい字をお願いします。判別できない文字は採点できません。特に、手書きの答えをデジタル化する場合には画像の劣化などで字が潰れないように注意して下さい。
5. 締切は 2022 年 1 月 19 日 23 時 59 分です。

1

以下の各問いに答えよ。

- (i) 対称群 S_5 の既約表現の個数を求めよ。
- (ii) 5 次の交代群 A_5 を考える。
 - (a) 共役類の個数と、各共役類の元の個数を求めよ。
 - (b) A_5 が、自明でない正規部分群を持たないことを示せ。(ヒント：正規部分群は共役類の和集合であることを用いれば良い。)
- (iii) リー代数 $\mathfrak{su}(N) = \{iZ \in M_n(\mathbb{C}) | Z = Z^\dagger\}$ (i は虚数単位) の基底を $\tilde{T}^a (a = 1, \dots, N^2 - 1)$ とする。ここで、 $T^a = -i\tilde{T}^a$ と定義する。これらは $N \times N$ のトレースレスなエルミート行列^{*1}であり、

$$[T^a, T^b] = \sum_{c=1}^{N^2-1} if_{abc}T^c \quad (1)$$

を満たすものとする。このとき、 f_{abc} は添字 a, b, c の入れ替えに対して完全反対称である。また、規格化条件 $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ を仮定する。

- (a) I を $N \times N$ の単位行列、 C_F を定数として

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} T^a T^a = C_F I \quad (2)$$

と書けることを示せ。また、 C_F の値を求めよ。

- (b) $i, j = 1, \dots, N$ に対して、行列の成分に関する等式

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{i\ell} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{k\ell} \right) \quad (3)$$

を示せ。

^{*1} 講義では数学の教科書の流儀に従って歪エルミートの \tilde{T}^a を用いた。一方、物理の教科書ではエルミートの T^a を用いることが多い。例えば、 $\mathfrak{su}(2)$ の場合、パウリ行列を $\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ としたとき、講義で用いた流儀では例えば $\tilde{T}^1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^x$, $\tilde{T}^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^y$, $\tilde{T}^3 = \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^z$ という基底が取れるが、この問題では $T^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^x$, $T^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^y$, $T^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^z$ で考える。

2

古典群の同型として $SU(2) \otimes SU(2) \cong SO(4)$ が古くから知られている。ここでは、同型写像 $F: SU(2) \otimes SU(2) \rightarrow SO(4)$ を具体的に構成したい。以下の問いに答えよ。

- (i) $SU(2)$, $SO(4)$, $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(4)$ はそれぞれ $M_2(\mathbb{C})$ あるいは $M_4(\mathbb{C})$ の部分集合としてはどのような集合か。ただし、講義で用いた（数学の教科書の）コンベンションで答えること。 $M_n(\mathbb{C})$ は n 次元複素正方行列全体の成す集合である。
- (ii) $SU(2) \otimes SU(2)$ のリー環が $\mathfrak{su}(2) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{su}(2)$ であることを示せ。

この古典群の同型を示すためにまずは、リー代数の同型 $\mathfrak{su}(2) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(4)$ を示す。そのために同型写像 $f: \mathfrak{su}(2) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(4)$ を構成する。ここで、 f として、 $f(A \otimes 1 + 1 \otimes B) = R^\dagger(A \otimes 1 + 1 \otimes B)R$ となるものを考えたいが、 R は 4×4 の行列で自由度が 16 と大きく、そのままでは考えにくいので以下の仮定をする。 $\mathfrak{su}(2)$ の基底はパウリ行列 σ^α ($\alpha = x, y, z$)^{*2} で、 $|+\rangle = (1, 0)^T$, $|-\rangle = (0, 1)^T$ とする。さらに、Bell 基底 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle), & |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), & |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle) \end{aligned} \quad (4)$$

とする。ただし、 $|i\rangle \otimes |j\rangle =: |ij\rangle$ とした。そして、 R を

$$R = (e^{i\theta_1} |\psi_1\rangle, e^{i\theta_2} |\psi_2\rangle, e^{i\theta_3} |\psi_3\rangle, e^{i\theta_4} |\psi_4\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & e^{i\theta_4} \\ 0 & e^{i\theta_2} & e^{i\theta_3} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & -e^{i\theta_3} & 0 \\ e^{i\theta_1} & 0 & 0 & -e^{i\theta_4} \end{pmatrix} \quad (5)$$

であると仮定する。

- (iii) f が同型写像になる R を求めよ。
- (iv) 同型 $SU(2) \otimes SU(2) \cong SO(4)$ を示せ。

参考文献

- Kazuyuki Fujii, Hiroshi Oike, and Tatsuo Suzuki, arXiv:quant-ph/0608186v2 (<https://arxiv.org/abs/quant-ph/0608186v2>)
- Kazuyuki Fujii, arXiv:1111.1487v1 (<https://arxiv.org/abs/1111.1487v1>)

^{*2} ここでは講義で用いた数学の教科書の流儀ではなく、基底を $-i$ 倍した物理の流儀に変更して考える。詳しくは大問 1 の脚注 1 を見よ。

3

リー代数 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の基底を以下のように取る。

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_\beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_\gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{-\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\beta} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & E_{-\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_2 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

- (i) 上の基底のうち何本か選ぶと、それらの張る部分代数はカルタン部分代数になる。そのカルタン部分代数を求めよ。(ヒント：カルタン部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ は \mathfrak{g} の極大な可換部分代数であって、任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して \mathfrak{g} 上の線型写像 $\text{ad}(h) : g \mapsto [h, g]$ が正則行列を用いて対角化できるものである。)

以下では、カルタン部分代数 \mathfrak{h} の基底として上で選んだ基底を用いよ。

- (ii) 全てのルートを求め、それらを図示せよ。(ヒント：カルタン部分代数 \mathfrak{h} の基底を $\{h_i | i = 1, \dots, m\}$ ($m = \dim \mathfrak{h}$) と選ぶ。各 h_i は交換するので、 ad の準同型性より各 $\text{ad}(h_i)$ も交換する。そのため各 $\text{ad}(h_i)$ を同時対角化することができる。ある同時固有ベクトル $g \in \mathfrak{g}$ が $\text{ad}(h_i)(g) = \alpha_{(h_i, g)}g$ を満たすとき、 g に対応するルートは $\alpha_g = (\alpha_{(h_1, g)}, \alpha_{(h_2, g)}, \dots, \alpha_{(h_m, g)})$ である。)
- (iii) $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ は、それ自身が恒等写像によって $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ の 3 次元表現になる。全てのウェイトを求め、それらを図示せよ。(ヒント： ϕ を \mathfrak{g} の表現とすると、カルタン部分代数の各基底 h_i は交換するので、 ϕ の準同型性より各 $\phi(h_i)$ は交換する。そのため各 $\phi(h_i)$ を同時対角化することができる。表現空間を V とすると、同時固有ベクトル $v \in V$ が $\phi(h_i)(v) = w_{(h_i, v)}v$ を満たすとき、 v に対応するウェイトは $w_v = (w_{(h_1, v)}, w_{(h_2, v)}, \dots, w_{(h_m, v)})$ である。今回 ϕ は $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ 上の恒等写像を考えれば良い。)
- (iv) ルートの集合を Δ と書き、ルート系と言う。 Δ の部分集合 $\Pi = \{\alpha_{g_1}, \dots, \alpha_{g_l}\}$ であって、

- Π の元は互いに線形独立であり、
- どの $\gamma \in \Delta$ も、全て非負または全て非正の整数の係数 c_i ($i = 1, \dots, l$) を用いて $\gamma = \sum_{i=1}^l c_i \alpha_{g_i}$ と書くことができる

ものが存在する。 Π をルートの基本系、 Π の要素のことを単純ルートという。また、以下のような手順で書かれた図形を Dynkin 図形という。

- $\alpha_{g_1}, \dots, \alpha_{g_l}$ を頂点 (o) として並べる。
- α_{g_i} と α_{g_j} の間に実内積 $(\alpha_{g_i}, \alpha_{g_j}) = \sum_{k=1}^m \alpha_{(h_k, g_i)} \alpha_{(h_k, g_j)}$ を入れる。この内積に関して α_i と α_j の成す角は $\pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6$ のうちいずれかであることが知られている。各々の場合、 α_{g_i} と α_{g_j} の間にそれぞれ 0 本、1 本、2 本、3 本の線分を引く。
- $\|\alpha_{g_i}\| < \|\alpha_{g_j}\|$ ($\|\alpha_{g_i}\|$ は α_i の、上で定義した内積に関する大きさ) のとき、 α_{g_j} から α_{g_i} に向かう矢印をつける。 $\|\alpha_{g_i}\| = \|\alpha_{g_j}\|$ のときはつけない。

リー代数 $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ のルートの基本系を 1 つ求めよ。また、Dynkin 図形を描け。

4

この問題では、正八面体上に $S = 1/2$ のスピンを配置した Heisenberg スピン模型を考える。そのためにまずスピン演算子を定義する。Pauli 行列は以下のように与えられる。

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

スピンの L 個ある系を考える。このとき、Pauli 行列から、スピン演算子 S_j^α ($j = 1, \dots, L, \alpha = x, y, z$) を以下のように定義する。

$$S_j^\alpha = \underbrace{I \otimes \dots \otimes I}_{j-1 \text{ 個}} \otimes \underbrace{\frac{1}{2} \sigma^\alpha}_{j \text{ 番目}} \otimes \underbrace{I \dots \otimes I}_{L-j \text{ 個}} \quad (8)$$

ただし、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad (9)$$

としたとき、 A と B のテンソル積は

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix} \quad (10)$$

で定義され、ベクトル

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad (11)$$

のテンソル積を

$$|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\ \beta \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix} \quad (12)$$

と定義したとき、 $A \otimes B$ はこれに

$$(A \otimes B) (|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle) = (A|v_1\rangle) \otimes (B|v_2\rangle) \quad (13)$$

と作用する。

$S = 1/2$ 正八面体 Heisenberg 模型のハミルトニアンは、以下で与えられる。

$$\begin{aligned} H = J & (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_5 \\ & + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_5 + \mathbf{S}_5 \cdot \mathbf{S}_2 \\ & + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_5 \cdot \mathbf{S}_6) \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{S}_j = (S_j^x, S_j^y, S_j^z)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) は図 1 のように配置されたサイト j におけるスピン演算子である。また、 S_j^z の固有値が $+1/2, -1/2$ の固有状態をそれぞれ、 $|\uparrow\rangle_j, |\downarrow\rangle_j$ とする。

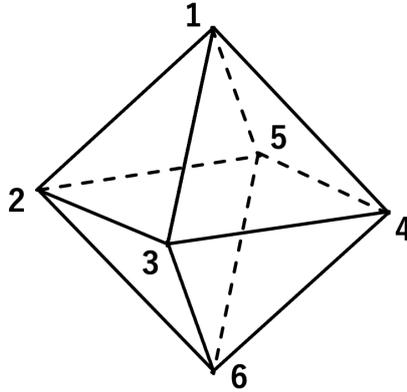


図1 正八面体におけるサイト j の配置

(i) 全スピン演算子 $\mathbf{S}_{\text{tot}} := \sum_{j=1}^6 \mathbf{S}_j$ がハミルトニアン H と交換することを確認せよ。

この系の状態を S_j^z の固有状態 ($|\uparrow\rangle_j, |\downarrow\rangle_j$) のテンソル積で書かれた状態として $|\uparrow\uparrow\cdots\downarrow\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |\downarrow\rangle_5 \otimes |\downarrow\rangle_6$ など書き表し、それらを基底としてとることを考えるとこのハミルトニアンは 64×64 行列となる。これを直接対角化するのは難しいが設問 (i) で示したように \mathbf{S}_{tot} が保存量である ($SU(2)$ 対称性を持っている) ことからある部分空間のみで考えればよく、さらに系が持つ対称性 (例えば C_{4v} など) の対称操作の固有値の組 (a, b, c, \dots) で指定される部分空間への射影演算子を用いることで行列をブロック対角化することができる。

(ii) $J < 0$ の場合を考える。このとき H の基底状態の固有エネルギーの表式を求めよ。また、その状態における $S_{\text{tot}}^z, (S_{\text{tot}})^2$ の値を求めよ。

(iii) $J > 0$ の場合を考える。このとき H の基底状態とその固有エネルギーの表式を求めよ。また、その状態における $S_{\text{tot}}^z, (S_{\text{tot}})^2$ の値を求めよ。

(数式処理ソフトなどを適宜用いても構わない。その場合は、用いたコードなどをレポートに貼ること。)

参考文献

- Takuya Eguchi, Satoshi Oga, Hosho Katsura, Andrej Gendiar, and Tomotoshi Nishino, arXiv:2109.10565v1 (<https://arxiv.org/abs/2109.10565v1>)

5

この問題ではコンパクト単純リー代数の Dynkin 図形について考える。コンパクト単純リー代数の構造は大問3で扱ったような単純ルートによって一意に決まり、一般に階数 r のコンパクト単純リー代数の単純ルート系には r 個の丸印を繋いだ図形 (Dynkin 図形) が1対1に対応することが知られている。

また、ある二つの単純ルート $\alpha, \beta \in \Pi$ について $(\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \dots, \alpha + n_1\beta), (\beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + n_2\alpha)$ がルートになるような上限 $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ を用いることで、ルート間の内積は

$$(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}n_1(\alpha, \alpha), \tag{15}$$

$$(\beta, \alpha) = -\frac{1}{2}n_2(\beta, \beta) \tag{16}$$

のように与えられる。(ただし $\alpha - \beta$ や $\beta - \alpha$ はルートではない。)

ここではコンパクト単純リー代数の構造に対応するような Dynkin 図形が以下のパターンしかないということを証明したい。

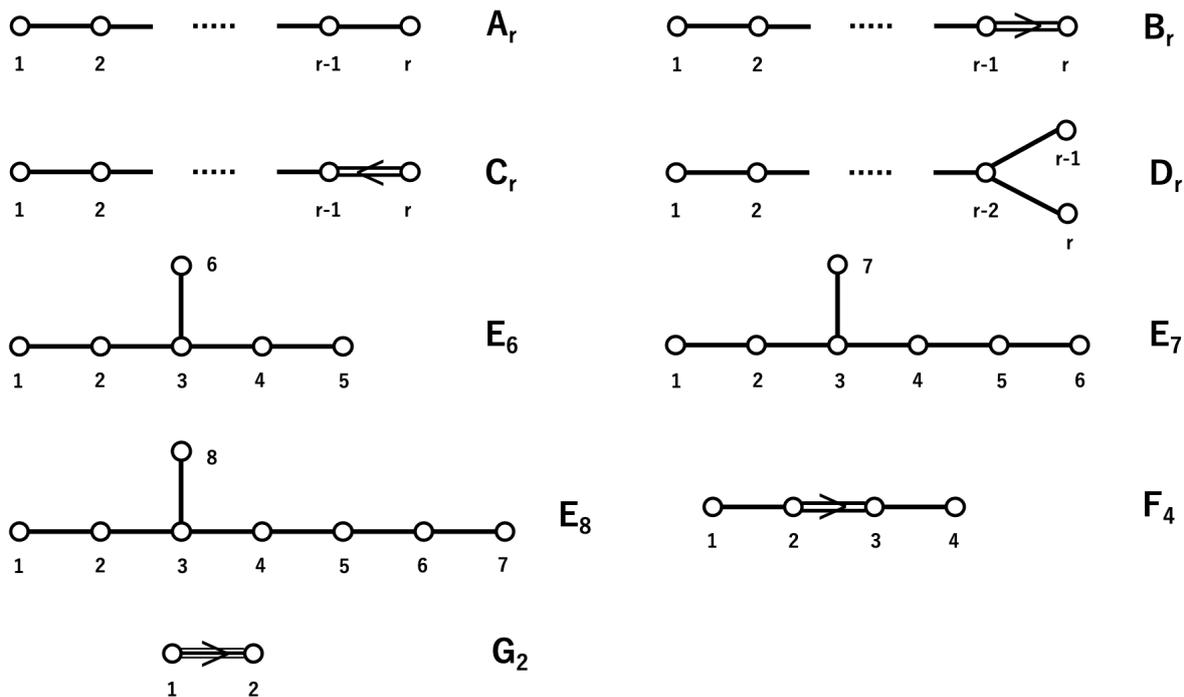


図2 コンパクト単純リー代数の Dynkin 図形

まず Dynkin 図に関する3つの基本的な性質を考える。以下の3つの問いに答えよ。

- (i) ルートの正定値性 $(\alpha, \alpha) \geq 0$ を用いて Dynkin 図の中に閉じたループが存在しないことを示せ。
- (ii) 一つの図形の中で3つ以上の2重線、2つ以上の3重線が存在しないことを示せ。

(iii) 方向余弦 $(\alpha, e_i)/(\alpha, \alpha)^{\frac{1}{2}}$ について $\sum_i (\alpha, e_i)^2 \leq (\alpha, \alpha)$ となることを用いて一つの丸印からは高々 3 本の線分しかつながらないことを示せ。

(ヒント：ルート α, β 間の角度 $\theta_{\alpha\beta}$ に対しルートの内積 (α, β) の式からどのような制限が課され、線分の本数とどのように関係するかを考えれば良い。)

これらの性質から $r = 3$ について可能な Dynkin 図形は A_3, B_3, C_3 のみであることがわかる。また 3 重線を持つ Dynkin 図は G_2 しかないことも (iii) より直ちにわかる。

次に 2 つのルートを折りたたんで 1 つのルートにすることを考える。この時以下の二つの問いに答えよ。

(iv) 以下のように一本線につながった 2 つのルート α, β を折りたたんで $\alpha + \beta$ というルートにすることを考える。この時折りたたむ前の Dynkin 図が可能なもの (各単純ルートが一次独立で (i) から (iii) で示した性質を満たすもの) であるとき折りたたみ後も Dynkin 図として可能なものであることを示せ。

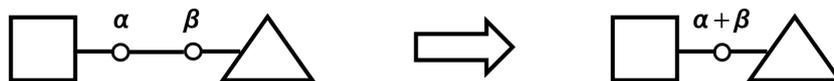


図 3 一本線につながるルートの折りたたみ

(v) 以下のように分岐するルート α, β を先程と同様に折りたたんで $\alpha + \beta$ という 2 重線につながるルートにすることを考える。この時折りたたみ前の Dynkin 図が可能なものであるとき折りたたみ後も Dynkin 図として可能なものであることを示せ。

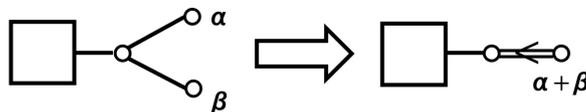


図 4 分岐点からつながるルートの折りたたみ

設問 (iv) と $r = 3$ に関する考察から 2 重線は図形の中で 2 回以上現れないこと (これは設問 (ii) より制限が厳しくなっている)、そしてこのことと設問 (v) から図形の中に分岐点と 2 重線はどちらか片方しか含まないことが言える。つまり全て 1 本線で鎖状につながった A_r と 3 重線を含む唯一のものである G_2 を除けばすべての Dynkin 図は (a) 分岐点型, (b) 2 重線型のどちらかに分類できる。

最後に $r \geq 4$ の Dynkin 図について考える。以下の問いに答えよ。

(vi) 以下の (α) ~ (δ) の 4 つのパターンの図形が単純ルートの一次独立性から禁じられることを示せ。

((δ) では 2 重線部分の矢印の向きが左向きのもので右向きのものそれぞれについて考えよ。)

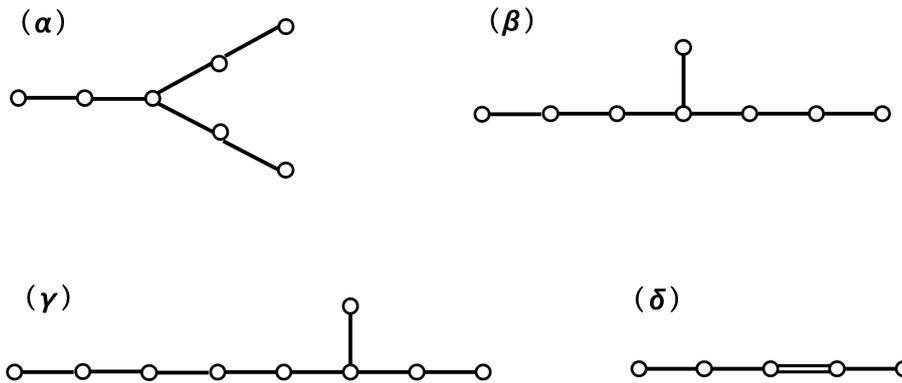


図5 禁じられる4つの図形

また、一本線につながるルートを折りたたむことでこれらになる図形も全て禁じられているものである。

(vii) A_r, G_2 を除けば可能な Dynkin 図は $B_r, C_r, D_r, E_6, E_7, E_8, F_4$ しかないことを証明せよ。

参考文献

- 佐藤光, “群と物理”, 丸善出版 (2016)

6

対称性の高い図形の塗り分け方に関して、Burnside の補題が知られている。この問題では、Burnside の補題を証明し、組み合わせ論の問題に応用することを目指す。そのために、まずは群の集合への作用を定義する。

G を群、 X を集合とする。 G の X への (左) 作用とは、写像 $\phi: G \times X \rightarrow X$ であり、次の性質を満たすものである。

- $e \in G$ を単位元、 $x \in X$ として $\phi(e, x) = x$
- $g, h \in G, x \in X$ として $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$

以下では、 $\phi(g, x)$ の代わりに $g(x)$ と書くことにする。このとき、上の2番目の性質は $g(h(x)) = (gh)(x)$ と書き直すことができる。

$x \in X$ のとき、 X の部分集合 $G(x) := \{g(x) | g \in G\}$ を x の G による軌道という。^{*3}また、 $\text{Stab}_G(x) := \{g \in G | g(x) = x\}$ は G の部分群であり、 x の安定化群 (固定部分群) という。以下では、 G は有限群、 X を有限集合とする。このとき、 G の $\text{Stab}_G(x)$ による (左) 剰余類分解を

$$G = \text{Stab}_G(x) \cup g_1 \text{Stab}_G(x) \cup \cdots \cup g_{m-1} \text{Stab}_G(x) \quad (17)$$

^{*3} 集合 $G(x)$ は同じ値の元を複数含まないため。有限群 G の元の個数と $G(x)$ の元の個数は一致するとは限らない。(例えば任意の $g \in G$ に対して $g(x) = x$ ならば $G(x) = \{x\}$ である。) G の元の個数と $G(x)$ の元の個数の違いは、以下で述べる軌道・固定部分群定理によって特徴付けられる。

とする。このとき、剰余類の集合と軌道 $G(x)$ は $g\text{Stab}_G(x) \mapsto g(x)$ によって 1 対 1 に対応する (軌道・固定部分群定理)。この定理から、 x の軌道の元の個数 $|G(x)|$ と x の安定化群の元の個数 $|\text{Stab}_G(x)|$ の間に

$$|G| = |G(x)| |\text{Stab}_G(x)| \quad (18)$$

という関係があることが分かる。

- (i) 正五角形を中心のまわりに $2\pi/5$ 回転させる対称操作 a と、ひとつの鏡映面による鏡映 b とから生成される二面体群 D_5 について考える (下図を参照)。

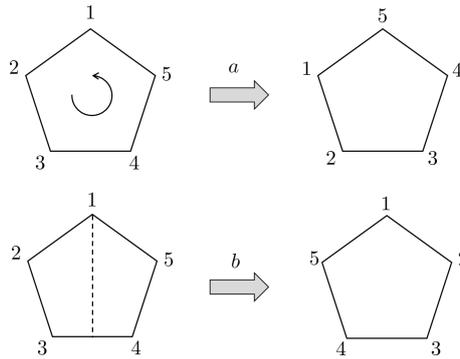


図 6 二面体群 D_5 の正五角形への作用

このとき、頂点 1 の D_5 による軌道 $D_5(1)$ を求めよ。また、頂点 1 の安定化群 $\text{Stab}_{D_5}(1)$ を求めよ。また、 $|D_5| = |D_5(1)| |\text{Stab}_{D_5}(1)|$ が成り立っていることを確認せよ。

- (ii) 正四面体を不変にする回転操作全体は群をなし、正四面体群と呼ばれる。正四面体群の元の個数を求めよ。(ヒント：正四面体の頂点の 1 つをとってきて、(18) を用いれば良い。)

次に、 X 上の同値関係 \sim を $x \sim y \Leftrightarrow G(x) = G(y)$ で定義する。この同値関係による商集合を X/G と書く。このとき、 $|X/G|$ は X 上の異なる軌道の個数である。また、 X の部分集合 $\text{Fix}_X(g) := \{x \in X | g(x) = x\}$ を g の不動点集合という。このとき、以下の等式が成り立つ (Burnside の補題)。

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|. \quad (19)$$

この補題を、以下の順番で証明する。

- (iii) $\sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)|$ を示せ。
 (iv) $x, y \in X$ に対して、 $y \in G(x)$ なら $|\text{Stab}_G(x)| = |\text{Stab}_G(y)|$ であることを示せ。
 (v) (19) を示せ。

ここで、組み合わせ論の問題に Burnside の補題を応用する。まずは、以下の問題を考える。

問題：5 個の石からなるブレスレットを考える。それぞれの石は赤、青、緑の 3 色のいずれかである。回転したり裏返したりして重なるブレスレットを同一視した場合、何種類のブレスレットを作ることができるか？ ■

対称性を考慮しない場合、ブレスレットの種類は 3^5 種類になる。このときのブレスレットの集合を X とする。回転したり裏返したりして重なるブレスレットを同一視することは、 $x \in X$ と、二面体群 D_5 による軌道 $D_5(x)$ の元を同一視することに対応している。つまり、回転したり裏返したりしても重ならないブレスレット

の種類は、 $|X/G|$ 種類である。一方、(19) の右辺はそのまま計算するのは大変だが、(iv) で証明した等式と同様に、 $g, h \in G$ が共役ならば $|\text{Fix}_X(g)| = |\text{Fix}_X(h)|$ が成り立つので、計算を簡単にできる。

(vi) 上のプレスレットの問題の答えを求めよ。

(vii) フィンランドの伝統的なクリスマスの装飾品にヒンメリと呼ばれるものがある。ヒンメリは藁に糸を通して作られ、天井やクリスマスツリーに吊るして飾られる。



図7 ヒンメリの例

赤、青、緑の3色のストローを合計12本用いて（使わない色のストローがあっても良い）、それらを辺とする正八面体の形のヒンメリを作り、1つの頂点から糸を伸ばして天井に吊るすことを考える。

- (a) 天井に吊るす前のヒンメリは、（糸の通し方や伸びた糸を考慮しなければ）正八面体群の対称性を持っている。回転して重なるものを同一視した場合、何種類のヒンメリを作ることができるか？
- (b) 天井に吊るした後のヒンメリは、糸の周りに $\pi/2$ 回転する対称性 C_4 を持っている。回転して重なるものを同一視した場合、何種類のヒンメリを飾ることができるか？